

# Henkin 構成による完全性定理の証明

2025.1.25

SnO2WMaN

## メタ情報

- この文書のリポジトリは <https://github.com/SnO2WMaN/notes-on-henkin-construction> です。誤植や訂正などは Issues から連絡してください。
- この文書は Creative Commons Attribution 4.0 International でライセンスされています。

## 目次

メタ情報 .....	1
1. 準備 .....	1
2. 完全性定理 .....	3
3. Henkin の構成 .....	3
参考文献 .....	6

1 階述語論理の完全性定理を Henkin の構成を用いて証明する。参考文献は [1].

## 1. 準備

### 記法 1.1:

- 以下では 1 階述語論理の事実を考えているとする。
- $\mathcal{L}$  は言語とする。
- $T$  は  $\mathcal{L}$  の理論とする。

**定義 1.2 (無矛盾性):**  $T \not\vdash \perp$  であるとき、 $T$  は無矛盾であるという。

古典論理では次が成り立つ。

**補題 1.3:**  $T \not\vdash \sigma$  な  $\sigma$  が存在するなら  $T$  は無矛盾である。

**証明:** 爆発律より明らか。 □

**補題 1.4:** 次は同値。

1.  $T \cup \{\neg\sigma\}$  が無矛盾である。
2.  $T \not\vdash \sigma$ .

**証明:** 対偶を示す。  $T \cup \{\neg\sigma\}$  が矛盾するなら  $T, \neg\sigma \vdash \perp$  であり、演繹定理と二重否定除去より  $T \vdash \sigma$  である。逆に  $T \vdash \sigma$  なら、二重否定導入より  $T \vdash \neg\neg\sigma$  であり、演繹定理より  $T, \neg\sigma \vdash \perp$  であり、 $T \cup \{\neg\sigma\}$  は矛盾する。 □

**補題 1.5:**  $T$  が無矛盾かつ  $T \vdash \sigma$  なら  $T \cup \{\sigma\}$  は無矛盾。

**定義 1.6 (極大無矛盾性):**  $T$  の真の無矛盾な拡大理論が存在しないとき,  $T$  は極大無矛盾であるという.

**補題 1.7:**  $T$  は極大無矛盾とする.  $T \vdash \sigma$  と  $\sigma \in T$  は同値.

**証明:**  $\sigma \in T$  なら  $T \vdash \sigma$  なのは明らか.

$T \vdash \sigma$  ならば  $T \cup \{\sigma\}$  は無矛盾. 仮に  $\sigma \notin T$  なら  $T \cup \{\sigma\}$  は  $T$  の無矛盾な真の拡大理論だが,  $T$  が極大無矛盾なのでそれはありえない. よって  $\sigma \in T$ .  $\square$

**補題 1.8:** 以下は同値.

1.  $T$  が極大無矛盾.
2. 全ての  $\sigma$  に対して  $\sigma \in T$  または  $\neg\sigma \in T$  が成り立つ.

**証明:**

1. から 2. を示す.  $T \vdash \sigma$  なら 補題 1.7 より  $\sigma \in T$ .  $T \not\vdash \sigma$  なら  $T \cup \{\neg\sigma\}$  は無矛盾.  $T$  が極大無矛盾なので  $\neg\sigma \in T$ .

2. から 1. を示す. 対偶を示す.  $T$  が極大無矛盾でないとする.  $T$  の真の無矛盾な拡大理論  $U$  が存在する.  $\sigma \in U \setminus T$  とすると,  $\neg\sigma \in T$  なら  $\neg\sigma \in U$  であり,  $U$  が矛盾する. よって  $\neg\sigma \notin T$ . 当然  $\sigma \notin T$  であるので示された.

$\square$

**補題 1.9 (Lindenbaum 補題):**  $T$  が無矛盾ならば  $T \subseteq U$  となる極大無矛盾な拡大理論  $U$  が存在する.

**証明:**  $\mathcal{L}$ -文を列挙して  $\sigma_0, \sigma_1, \dots$  とする.  $\sigma_i, \neg\sigma_i$  によって枝分かれする完全無限二分木を作る. この木の枝と, 枝に現れる文の集合とを同一視することにする.

この木には  $T$  と矛盾しない無限の長さを持つ枝が存在する.

存在しないと仮定すると, 任意の枝についてその枝の先端部分までの  $\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$  に  $\sigma_{n+1}$  または  $\neg\sigma_{n+1}$  のどちらを加えても  $T$  とは矛盾する: これ以上は伸ばせない.

仮に,  $\sigma_{n+1}$  を加えると矛盾するならば,  $T, \sigma_0, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1} \vdash \perp$  である. 演繹定理より  $T, \sigma_0, \dots, \sigma_n \vdash \sigma_{n+1} \rightarrow \perp$  すなわち  $T, \sigma_0, \dots, \sigma_n \vdash \neg\sigma_{n+1}$  である.  $T \cup \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$  は無矛盾なので 補題 1.5 より  $T \cup \{\sigma_0, \dots, \sigma_n, \neg\sigma_{n+1}\}$  も無矛盾である. しかし, これは仮定に反するのでおかしい.

同様に  $\neg\sigma_{n+1}$  を加えると矛盾するなら,  $T \cup \{\sigma_0, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}\}$  が無矛盾であることが示されておかしい.

よって, 木の高さは無限であり, 木は無有限木である.

このような無限長の枝から適当に一つ選び, この枝を  $U$  とすると, これは極大無矛盾な拡大理論である.

$U$  が  $T$  を含むこと及び  $T$  が無矛盾であることは明らか.  $U$  が極大無矛盾であることは, 補題 1.8 から任意の文  $\sigma$  に対して  $\sigma \in U$  または  $\neg\sigma \in U$  であることを示せばよく, これも枝の作り方と無限長であることより明らか.  $\square$

## 2. 完全性定理

**定理 2.1 (健全性定理):**  $T \vdash \sigma$  ならば  $T \models \sigma$ .

**証明:**  $\sigma$  の論理式に関する帰納法. □

より強く, 次の系 2.2 が成り立つ.

**系 2.2:**  $T$  がモデルを持つならば  $T$  は無矛盾である.

**証明:**  $T$  がモデルを持つなら  $T \cup \{\neg \perp\}$  もモデルを持つので,  $T \not\vdash \perp$ . 定理 2.1 より  $T \not\models \perp$  なので,  $T$  は無矛盾. □

定理 2.1 の逆<sup>1</sup>も成り立つ.

**定理 2.3 (完全性定理):** 次は同値.

1.  $T \models \sigma$ .
2.  $T \vdash \sigma$ .

これは一般化された形である定理 2.4 から従う.

**定理 2.4 (一般化された完全性定理):** 次は同値.

1.  $T$  が無矛盾.
2.  $T$  はモデルを持つ.

**証明 (定理 2.3):** 2.から 1.は定理 2.1 より明らか. 1.から 2.を示す.

$T \models \sigma$  なら  $T \cup \{\neg \sigma\}$  はモデルを持たず, 定理 2.4 より  $T \cup \{\neg \sigma\}$  は矛盾する. このとき特に  $T, \neg \sigma \vdash \perp$  であり, 演繹定理より  $T \vdash \neg \neg \sigma$  で, 二重否定除去より  $T \vdash \sigma$ . □

定理 2.4 の片方は系 2.2 そのものであるが, 他方は明らかではない. 無矛盾な理論から実際にモデルを構成する方法の一つが Henkin の構成である.

## 3. Henkin の構成

**記法 3.1:**

- $T$  は無矛盾とする.
- 変数記号  $v_0$  を一つ固定する.
- $v_0$  のみを自由変数とする  $\mathcal{L}$ -論理式の集合を  $F_{\mathcal{L}}$  とする.

**定義 3.2:**  $i \in \omega$  とし,  $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}, \mathcal{L}_i$  を以下のように定める.

1.  $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}$  とする.
2.  $F_{\mathcal{L}_i}$  に対応する定数記号を  $\mathcal{C}_i := \{c_\varphi \mid \varphi \in F_{\mathcal{L}_i}\}$  とする. ただし  $c_\varphi$  は  $\mathcal{L}_i$  の定数記号ではないものとする.

<sup>1</sup>正確に言えば, 1.から 2.の含意を狭義の完全性定理と呼び, 同値すなわち定理 2.3 は広義の完全性定理という.

3.  $\mathcal{L}_{i+1} := \mathcal{L}_i \cup \mathcal{C}_i$  とする.
4.  $\mathcal{C} := \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{C}_i$  とする.

**定義 3.3** (Henkin 公理):  $\varphi(v_0) \in F_{\mathcal{L} \cup \mathcal{C}}$  とする. 次の  $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ -文  $\eta_\varphi$  を  $\varphi$  に対する Henkin 公理 とよぶ.

$$\eta_\varphi := \exists v_0. \varphi(v_0) \rightarrow \varphi(c_\varphi)$$

**定義 3.4** (Henkin 拡大理論): 言語  $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$  の理論  $T^H := T \cup \{\eta_\varphi \mid \varphi(v_0) \in F_{\mathcal{L} \cup \mathcal{C}}\}$  を  $T$  の Henkin 拡大理論 という.

**補題 3.5:**  $T^H \subseteq U$  とする. 以下は同値.

1.  $U \vdash \exists v. \varphi(v_0)$
2.  $U \vdash \varphi(c_\varphi)$

**証明:** 1.から 2.は  $U$  には  $\varphi$  の Henkin 公理が含まれていることから従う. 2.から 1.は明らか.  $\square$

**補題 3.6:**  $T$  は  $\mathcal{L}_i$  の理論,  $\varphi(v_0)$  は  $\mathcal{L}_i$ -論理式,  $\sigma$  は  $\mathcal{L}_i$ -文 とする. このとき,  $T, \eta_\varphi \vdash \sigma$  ならば  $T \vdash \sigma$ .

**証明:** 演繹定理より  $T \vdash \eta_\varphi \rightarrow \sigma$  であり, 展開すると  $T \vdash [\exists v_0. \varphi(v_0) \rightarrow \varphi(c_\varphi)] \rightarrow \sigma$ .

ここで定義より  $c_\varphi \in \mathcal{L}_{i+1}$  であることに注意すると,  $T$  は  $\mathcal{L}_i$  の理論であるので, 実際には  $c_\varphi$  はこの演繹には現れることはない. よって, この演繹に含まれないフレッシュな変数記号  $w$  を取ってきて  $c_\varphi$  を  $w$  に置き換えることで  $[\exists v_0. \varphi(v_0) \rightarrow \varphi(w)] \rightarrow \sigma$  は  $\mathcal{L}_i$ -文として見ることができて, 更に元の演繹によって  $T \vdash [\exists v_0. \varphi(v_0) \rightarrow \varphi(w)] \rightarrow \sigma$  が言える.

$w$  に対して全称化をして  $T \vdash \forall w. [[\exists v_0. \varphi(v_0) \rightarrow \varphi(w)] \rightarrow \sigma]$ . 更に適当な 1 階述語論理の計算によって  $T \vdash [\exists v_0. \varphi(v_0) \rightarrow \exists w. \varphi(w)] \rightarrow \sigma$  が言える. 前件は明らかなので  $T \vdash \sigma$ .  $\square$

**注意 3.7:** 定義 3.2 で  $c_\varphi$  は  $\varphi$  が属する言語  $\mathcal{L}_i$  の定数記号ではないものと保証したことがこの証明では効いている. この保証がなければ,  $c_\varphi \in \mathcal{L}_{i+1}$  すなわち  $c_\varphi \notin \mathcal{L}_i$  であることは言えず, 適切な置き換えができない.

**補題 3.8:**  $T^H$  は  $T$  の保存的拡大.

**証明:**  $\sigma$  は  $\mathcal{L}$ -文 とし,  $T^H \vdash \sigma$  と仮定して  $T \vdash \sigma$  を示す.

$T^H \vdash \sigma$  の演繹上に現れる Henkin 公理の集合を  $H$  とすると, これは有限であり,  $T \cup H \vdash \sigma$  である. 今,  $H$  に含まれる最も大きな言語  $\mathcal{L}_i$  の Henkin 公理を  $\eta_i$  とする.

このとき,  $T \cup (H \setminus \{\eta_i\}), \eta_i \vdash \sigma$  であるから, 補題 3.6 より  $T \cup (H \setminus \{\eta_i\}) \vdash \sigma$  である.

これを  $H$  の要素の数だけ繰り返せば、いずれ  $T \vdash \sigma$  が得られる。 □

**系 3.9:**  $T^H$  は無矛盾。

**証明:** 無矛盾な保存的拡大理論は無矛盾であることから従う。 □

**系 3.10:**  $T^H$  を含む極大無矛盾な拡大理論が存在する。

**証明:** 系 3.9 と 補題 1.9 より。 □

**記法 3.11:** 以下、 $T^*$  は系 3.10 で得られる  $T^H$  の極大無矛盾な拡大理論とする。

**補題 3.12:**  $\varphi(v_0) \in F_{\mathcal{L} \cup \mathcal{C}}$  とする。  $\exists x.\varphi(x) \in T^*$  ならば  $\varphi(c_\varphi) \in T^*$  である。

**証明:** 補題 1.8 と 補題 3.5 より明らか。 □

**定義 3.13:**  $\mathcal{C}$  上の同値関係  $\sim$  を  $c_1 \sim c_2 \iff c_1 = c_2 \in T^*$  で定める。  $c$  の  $\sim$  による同値類を  $\tilde{c}$  と書く。

**注意 3.14:** これが同値関係になることは、 $=$  の等号としての性質が 1 階述語論理の等号の公理によって正当化されることから従う。

**定義 3.15 (Henkin モデル):**  $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$  上のモデル  $\mathfrak{M}_T^H$  を、領域を  $\mathcal{C}/\sim$  として次のように定める。

1. 定数記号  $c \in \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$  の  $\mathfrak{M}_T^H$  での解釈は、 $\varphi(v_0) \equiv v_0 = c$  として、以下のように定める。

$$c^{\mathfrak{M}_T^H} \mapsto \tilde{c}_\varphi$$

2.  $n$  アリテ  $i$  の関数記号  $f \in \mathcal{L}$  の  $\mathfrak{M}_T^H$  での解釈は、 $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}$ ,  $\varphi(v_0) \equiv v_0 = f(c_1, \dots, c_n)$  として、以下のように定める。

$$f^{\mathfrak{M}_T^H}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n) \mapsto \tilde{c}_\varphi$$

3.  $n$  アリテ  $i$  の述語記号  $P \in \mathcal{L}$  の  $\mathfrak{M}_T^H$  での解釈は、 $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}$  として、以下のように定める。

$$P^{\mathfrak{M}_T^H}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n) \iff P(c_1, \dots, c_n) \in T^*$$

$\mathfrak{M}_T^H$  を  $T$  の Henkin モデルという。

**注意 3.16:** 定数記号  $c$  の解釈について考える。  $\varphi(v_0) \equiv v_0 = c$  とする。 自明に  $T^* \vdash \exists v_0.\varphi(v_0)$  であるから、 $\exists v_0.\varphi(v_0) \in T^*$  であり 補題 1.8 より  $\varphi(c_\varphi) \in T^*$  である。 したがって  $c_\varphi = c \in T^*$  であるので、 $c \in \tilde{c}_\varphi$  である。

関数記号  $f$  の解釈について考える.  $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}$  として  $\varphi(v_0) := v_0 = f(c_1, \dots, c_n)$  とする. やはり同様に  $\exists v_0. \varphi(v_0) \in T^*$  であるから,  $\varphi(c_\varphi) \in T^*$  であり  $c_\varphi = f(c_1, \dots, c_n) \in T^*$  である. したがって  $f(c_1, \dots, c_n) \in \tilde{c}_\varphi$  である. これは代表元  $c_1, \dots, c_n$  の取り方によらず定義されている.

述語記号  $P$  の場合も代表元  $c_1, \dots, c_n$  の取り方によらず定義されている.

**補題 3.17 (真理補題):** 任意の  $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ -文  $\sigma$  に対して, 以下は同値.

1.  $\sigma \in T^*$
2.  $\mathfrak{M}_T^H \models \sigma$

**証明:**  $\sigma$  の論理式に関する帰納法.

$\sigma$  が原子論理式の場合, および  $\perp$  の場合は  $\mathfrak{M}_T^H$  の定義より明らか.

$\sigma := \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$  の場合については,  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \in T^*$  は  $\sigma_1 \notin T^*$  または  $\sigma_2 \in T^*$  であることと同値であることに注意して, 帰納法の仮定を使えばよい.

$\sigma := \forall x. \varphi(x)$  の場合について示す.  $\varphi(x)$  は  $x$  にのみ自由変数を持つ  $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}$ -論理式とする.

1. から 2. を示す. 任意の  $\tilde{c} \in |\mathfrak{M}_T^H|$  に対して  $\mathfrak{M}_T^H \models \varphi(\tilde{c})$  であることを示せばよい.

任意に  $\tilde{c} \in |\mathfrak{M}_T^H|$  を取る.  $c \in \mathcal{C}$  に注意すると,  $\forall x. \varphi(x) \in T^*$  より  $\varphi(c) \in T^*$  である. 帰納法の仮定より,  $\mathfrak{M}_T^H \models \varphi(c)$  である.  $\mathfrak{M}_T^H$  の解釈は代表元の取り方によらないので  $\mathfrak{M}_T^H \models \varphi(\tilde{c})$  である.

2. から 1. を示す. 対偶を示す.  $\forall x. \varphi(x) \notin T^*$  ならば  $\mathfrak{M}_T^H \not\models \forall x. \varphi(x)$  であることを示せばよい.

$\forall x. \varphi(x) \notin T^*$  なら 1 階述語論理の計算によって  $\exists v_0. \neg \varphi(v_0) \in T^*$  である. 特に  $x$  を最初に固定した  $v_0$  として  $\exists v_0. \neg \varphi(v_0) \in T^*$  である.

$T^*$  は  $\neg \varphi$  に対する Henkin 公理  $\eta_{\neg \varphi} \equiv \exists v_0. \neg \varphi(v_0) \rightarrow \neg \varphi(c_{\neg \varphi})$  を含むので,  $\neg \varphi(c_{\neg \varphi}) \in T^*$  である. したがって,  $\varphi(c_{\neg \varphi}) \notin T^*$  である.

帰納法の仮定より,  $\mathfrak{M}_T^H \not\models \varphi(c_{\neg \varphi})$  である. したがって,  $\mathfrak{M}_T^H \not\models \forall x. \varphi(x)$  である.

□

**系 3.18:**  $\mathfrak{M}_T^H \models T$ .

**証明:**  $\mathfrak{M}_T^H$  が  $T^*$  のモデルであることと,  $T \subseteq T^*$  から従う. □

系 3.18 より, 定理 2.4 が示せる.

**証明 (定理 2.4):** 片方は系 2.2 そのもの. もう片方は無矛盾な理論から  $T$  の Henkin モデル  $\mathfrak{M}_T^H$  を構成すれば, 系 3.18 より  $T$  のモデルとなるので良い. □

## 参考文献

1. 菊池誠: 不完全性定理. 共立出版 (2014)