Kripke 不完全な様相論理

SnO2WMaN

Creative Commons
Attribution 4.0
International

2025/2/14

目次

1. 本文

標準的な様相論理において, Kripke 意味論は有用ではあるが, 万能ではない．例えば, 非反射的な Kripke フレームのクラスを標準的な様相論理で特徴づけることは出来ないことはよく知られている． 更に微妙な結果として，Kripke 意味論に対して完全ではない，すなわち Kripke 不完全な様相論理も存在する．この文書では $\mathbf{KH}$ が Kripke 不完全であることの証明を載せておく． 証明は [1] および [2] に基づく [1]．なお，ここに書いた証明は Lean4 で形式化済みである．

記法 1.1： この文書では以下の用に用語を用いる．

- 論理とは Hilbert 流の証明体系を表すものとする．
- 単にフレームと言ったら Kripke フレームのことを指すものとする．同様に，モデルと言ったら Kripke モデルのことを指すものとする．

定義 1.2（様相論理の公理）： 命題変数 p を一つ固定して，以下の公理を定める．

$$
\begin{aligned}
\mathsf{4} &\equiv \Box p \to \Box\Box p \\
\mathsf{L} &\equiv \Box(\Box p \to p) \to \Box p \\
\mathsf{H} &\equiv \Box(\Box p \leftrightarrow p) \to \Box p
\end{aligned}
$$

p を適当な論理式で置き換えることで得られる論理式を，公理のインスタンスという．

定義 1.3： 公理を追加するとは，全ての公理のインスタンスを証明可能な論理式として追加することを指す．

- $\mathbf{K}$ に公理 L を追加した論理は $\mathbf{GL}$ と呼ばれる．
- $\mathbf{K}$ に公理 H を追加した論理は $\mathbf{KH}$ と呼ばれる．

[1] ただし [2] に記載されている証明は大枠では正しいが，細部が誤っている気がする．誤植だろうか？

注意 1.4： 歴史的経緯を少し触れておく．詳しくは [3, pp.109-111] なども参照のこと．**GL** は不完全性定理における証明可能性述語の挙動を様相論理によって分析する証明可能性論理と呼ばれる分野でよく知られている．不完全性定理は「自分自身の正しさと**反証可能性**が同値である文[2]の挙動はどうなるか？」という問に対する系であるとも考えられる．これを踏まえて，Henkin は「では，自分自身の正しさと自分自身の**証明可能性**が同値である文の挙動はどうなるか？」という問題を提起した．次の Löb の定理はこの問に対する回答であり，特に同値性は必要なく，片側の含意だけで良いことがわかった．

定理（Löb の定理）： $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \to \sigma$ ならば $T \vdash \sigma$.

更にこれを形式化することで次の定理も得られる．

定理（形式化された Löb の定理）： $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \to \sigma \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\sigma\urcorner)$.

公理 L は形式化された Löb の定理に対応している．では，元々の Henkin の問題で要請されていた同値性に関しては結局どうなるのだろうか？ これに対応する公理が H である．

KH は Kripke 意味論に対して完全ではない論理の一つである．すなわち，定理 1.5 が成り立つ．

定理 1.5（KHの Kripke 不完全性）： **KH** に対して健全かつ完全なフレームのクラスは存在しない．すなわち，任意の論理式 φ に対して，以下を満たすフレームクラス C は存在しない．

$$\mathbf{KH} \vdash \varphi \iff \forall F \in C. F \vDash \varphi$$

定理 1.5 は 補題 1.6 と 補題 1.7 から従う．

補題 1.6： 任意のフレーム F に対し，次が成立する．

$$F \vDash \mathsf{H} \Longrightarrow F \vDash \mathsf{4}$$

補題 1.7： $\mathbf{KH} \nvdash \mathsf{4}$.

証明（定理 1.5）： 仮にそのようなクラスが C として存在したとする．**KH** では明らかに公理 H が証明可能なので，$C \vDash \mathsf{H}$ が成立する．補題 1.6 より $C \vDash \mathsf{4}$ が成立する．よって $\mathbf{KH} \vdash \mathsf{4}$．しかし補題 1.7 よりこれはおかしい． ❑

それでは 補題 1.6 と 補題 1.7 を示そう．

[2] このような文を構成する補題がいわゆる対角化補題である．

1.1. 補題 1.6 の証明

こちらの証明は比較的簡単である． まず，次の事実が成り立つ．

> **命題 1.8：** フレーム F に対し，$F \vDash \mathsf{L}$ なら，F は推移的であり，したがって $F \vDash \mathsf{4}$ である．

証明： 証明略． [4] や [5] などを参照せよ． ❑

次の補題が肝心である．

> **補題 1.9：** 任意のフレーム $F = \langle W, R \rangle$ に対し，次が成立する．
>
> $$F \vDash \mathsf{H} \Longleftrightarrow F \vDash \mathsf{L}$$

証明： $\Longleftarrow$ は素直に計算すればよい． $\Longrightarrow$ を示す．

$F \vDash \mathsf{H}$ と仮定する．更に，付値 $\Vdash$ と $x, y \in W$ で xRy となるものを任意にとり，$\langle F, \Vdash \rangle, x \vDash \Box(\Box p \to p)$ と仮定し， $\langle F, \Vdash \rangle, y \vDash p$ を示す．

次のように付値 $\Vdash'$ を定める．

$$w \Vdash' q \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \langle F, \Vdash \rangle, w \vDash \Box^n q$$

次が成り立つ．

$$\langle F, \Vdash' \rangle, x \vDash \Box(\Box p \leftrightarrow p) \tag{1}$$

> 任意の xRz となる z で $\langle F, \Vdash' \rangle, z \vDash p \Longleftrightarrow \langle F, \Vdash' \rangle, z \vDash \Box p$ となることを示せば良い．
>
> 以下のように示される．
>
> $$\begin{aligned} \langle F, \Vdash' \rangle, z \vDash p &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \langle F, \Vdash \rangle, z \vDash \Box^n p && \text{(2.I)} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \langle F, \Vdash \rangle, z \vDash \Box^{n+1} p && \text{(2.II)} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \forall w, zRw : \langle F, \Vdash \rangle, z \vDash \Box^n p \\ &\Longleftrightarrow \forall w, zRw : \langle F, \Vdash' \rangle, z \vDash p \\ &\Longleftrightarrow \langle F, \Vdash' \rangle, z \vDash \Box p \end{aligned}$$
>
> 式 2.II から 式 2.I を出すことについてだけ注意しておく． これは $\langle F, \Vdash \rangle, z \vDash \Box\Box^n p \to \Box^n p$ を示せば良い． n についての帰納法を回した時，$n = 0$ のケースは最初の仮定 $\langle F, \Vdash \rangle, x \vDash \Box(\Box p \to p)$ より $\langle F, \Vdash \rangle, z \vDash \Box p \to p$ から従う．$n > 0$ に関しては帰納法の仮定を用いて証明すれば良い．

式 1 と $F \vDash \mathsf{H}$ を合わせれば次を得る．

$$\langle F, \Vdash' \rangle, x \vDash \Box p \tag{3}$$

式 3 と xRy から $\langle F, \Vdash' \rangle, y \vDash p$ が成り立つ．$\Vdash'$ の定義より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\langle F, \Vdash \rangle, y \vDash \Box^n p$ が成り立つ． 特に $n = 0$ とすれば $\langle F, \Vdash \rangle, y \vDash p$ が成り立つ． ❑

後は簡単である．

証明（補題 1.6）： 命題 1.8 と 補題 1.9 より明らか． ❑

注意 1.10： 補題 1.9 は，L によって定義されるフレームのクラスと H でも定義されるフレームのクラスが一致することを示している．

1.2. 補題 1.7 の証明

こちらはややテクニカルな議論が必要である． 補題 1.7 を示す前に次の補題を用意しておこう．

補題 1.11： $\mathbf{K}$ に公理の集合 Σ を全て追加した論理体系を $\mathbf{K\Sigma}$ とする． あるモデル M が Σ の**公理のインスタンス**を全て妥当にするなら，$\mathbf{K\Sigma} \vdash \varphi \Longrightarrow M \vDash \varphi$.

証明： 命題論理のトートロジー，公理 K のインスタンスは任意のモデルで妥当であり，また推論規則モーダス・ポネンス，ネセシテーションはモデルによる妥当性を保存する． これらの事実と Σ の公理のインスタンスが全て妥当であるという仮定を用いて，$\mathbf{K\Sigma} \vdash \varphi$ の Hilbert 流証明体系での証明による帰納法を回せば良い． ❑

補題 1.7 は 補題 1.11 の対偶を用いて証明する．

証明（補題 1.7）： 補題 1.11 の対偶より，H のインスタンスを全て妥当にし，4 を妥当にしないモデルが存在することを示せば十分であり，Cresswell のモデルと呼ばれるモデルはその条件を満たす． ❑

それでは実際に Cresswell のモデルを定義し，実際に条件を満たすか確認する．

定義 1.12（Cresswell のモデル）： Cresswell のモデル $M_{\mathrm{C}} \coloneqq \langle W, R, \Vdash \rangle$ は以下のように定義される．

まず $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合として，$\mathbb{N}^\sharp, \mathbb{N}^\flat$ の 2 つの集合を定める．$\mathbb{N}^\sharp \cap \mathbb{N}^\flat = \emptyset$ である．

$$\mathbb{N}^\sharp = \left\{0^\sharp, 1^\sharp, 2^\sharp, \ldots\right\}$$
$$\mathbb{N}^\flat = \left\{0^\flat, 1^\flat, 2^\flat, \ldots\right\}$$

$W = \mathbb{N}^\sharp \cup \mathbb{N}^\flat$ とする．

次に R を以下のように定める．任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

1. $n^\sharp R m^\sharp \Longleftrightarrow n \leq m + 1$
2. $n^\flat R m^\flat \Longleftrightarrow n > m$
3. $n^\sharp R m^\flat$

最後に，$w \Vdash a \Longleftrightarrow w \neq 0^\sharp$ と定める．

注意 1.13： フレームをわかりやすく図示すると以下のようになる．

$$0^\sharp, 1^\sharp, 2^\sharp, \ldots, n^\sharp, \ldots, m^\flat, \ldots, 2^\flat, 1^\flat, 0^\flat$$

$\mathbb{N}^\sharp$ では一歩だけ戻ることが出来る，すなわち $(n+1)^\sharp R n^\sharp$ である． しかし，それ以外では全体的に左から右にしか行けない一方通行であると思えば良い．

まず公理 4 が Cresswell のモデルでは妥当でないことを示そう．

補題 1.14： $M_{\mathrm{C}}, 2^\sharp \not\vDash 4$.

証明： $2^\sharp \vDash \Box p$ と $2^\sharp \not\vDash \Box\Box p$ を示せば良い．$2^\sharp$ から 1 歩だけで行ける世界に $0^\sharp$ は存在しない．よって $2^\sharp \vDash \Box p$ が成り立つ． 他方，$2^\sharp$ から 2 歩で行ける世界には $0^\sharp$ が存在する．よって $2^\sharp \not\vDash \Box\Box p$ が成り立つ． ❑

次に，H の全てのインスタンスが Cresswell のモデルで妥当であることを示す． その前に Truthset と呼ばれる集合とその補題を準備する．

定義 1.15： φ に対して $\{x \mid M_{\mathrm{C}}, x \vDash \varphi\}$ を $[\varphi]$ と書いて，φ の Truthset と呼ぶ．

補題 1.16： 任意の φ に対し，$[\varphi]$ またはその補集合 $[\varphi]^c$ のどちらかは有限である．

証明： φ に関する論理式の帰納法で示す．

> $\varphi \equiv p$ なら $[p]^c = \left\{0^\sharp\right\}$ なのでよい．

> $\varphi \equiv \bot$ なら $[\bot] = \emptyset$ なのでよい．

> $\varphi \equiv \psi \to \xi$ のとき．$[\psi \to \chi] = [\psi]^c \cup [\chi]$ であることに注意する． 補集合を考えると，$[\psi]^c \cup [\chi]$ または $[\psi] \cap [\chi]^c$ のどちらかが有限であることを示せばよい．帰納法の仮定を用いれば4パターンに分類出来る．
>
> > $[\psi]$ が有限か $[\chi]^c$ が有限ならば $[\psi] \cap [\chi]^c$ が有限.
>
> > $[\varphi]^c$ が有限かつ $[\psi]$ が有限のときは $[\psi]^c \cup [\chi]$ が有限.
>
> よってよい．

> $\varphi \equiv \Box\psi$ のとき．
>
> $\mathbb{N}^\flat \subseteq [\psi]$ かそうでないかで場合分けを行う．
>
> > そうでないとき，すなわちある $n^\flat$ が存在して $n^\flat \notin [\psi]$ であるとする．
> >
> > このとき $[\Box\psi] \subseteq \left\{m^\flat \mid m \leq n\right\}$ を示す． 任意の $x \in [\Box\psi]$ が $x \in \left\{m^\flat \mid m \leq n\right\}$ であることを示せばよい． x で場合分けする．
> >
> > > $x = m^\sharp$ であるとき，$m^\sharp R n^\flat$ だから $n^\flat \in [\psi]$ となっておかしい．
> >
> > > $x = m^\flat$ であるとき，仮に含まれていない，すなわち $m > n$ と仮定する． このとき $m^\flat R n^\flat$ だから $n^\flat \in [\psi]$ となっておかしい．
> >
> > $\left\{m^\flat \mid m \leq n\right\}$ は有限であるので $[\Box\psi]$ も有限である．

$\mathbb{N}^\flat \subseteq [\psi]$ のとき．帰納法の仮定より $[\psi]^c$ は有限である．

$[\varphi]^c$ が空集合なら $[\psi] = W$ であり，$[\Box\psi] = W$ が言える．よって $[\Box\psi]^c = \emptyset$ であり，これは明らかに有限である．したがって，$[\psi]^c$ は空集合でないとする．

最大の $n^\sharp \in [\psi]^c$ を取る．すなわち任意の $n < m$ で $m^\sharp \in [\psi]$ である．

このとき $[\Box\psi]^c \subseteq \left\{m^\sharp \mid m \leq n+1\right\}$ であることを示す．任意の $x \in [\Box\psi]^c$ が $x \in \left\{m^\sharp \mid m \leq n+1\right\}$ であることを示せばよい．$x \in [\Box\psi]^c$ から更に xRy となる y が存在して $y \notin [\psi]$ である．x, y で場合分けする．

$y = k^\flat$ ではない．仮に $y = k^\flat$ なら，仮定より $k^\flat \in [\psi]$ であり，おかしい．

$x = m^\flat$ かつ $y = k^\sharp$ は $m^\flat R k^\sharp$ ではないのでありえない．

$x = m^\sharp$ かつ $y = k^\sharp$ であると仮定する．$m^\sharp R k^\sharp$ なので，$m \leq k+1$ である．仮に含まれないとすると，$m > n+1$ である．したがって，$n < k$ であるから，最大値の仮定より $k^\sharp \in [\psi]$ が言えておかしい．

$\left\{m^\sharp \mid m \leq n+1\right\}$ は有限であるので $[\Box\psi]$ も有限である．

よって示された．❑

では 補題 1.17 を示そう．

補題 1.17： H の全てのインスタンスは M で妥当.

証明： 論理式 φ による H のインスタンスを考える．任意に $x \in W$ とし，$x \vDash \Box(\Box\varphi \leftrightarrow \varphi) \to \Box\varphi$ を示す．

$\mathbb{N}^\flat \subseteq [\varphi]$ かそうでないかで場合分けを行う．

そうでないとき，すなわちある $n^\flat$ が存在して $n^\flat \notin [\varphi]$ であるとする．

このとき, 一般性を失わずに $n^\flat$ は最小, すなわち, 任意の $m > n$ に対して $m^\flat \in [\varphi]$ としてよい．

$m^\flat \notin [\varphi]$ かつ，任意の $k > m$ に対して $k^\flat \in [\varphi]$ となる $m^\flat$ を $0^\flat, 1^\flat, \ldots$ から探していく．例えば，仮に $0^\flat \in [\varphi]$ であった場合，次の $1^\flat$ について $1^\flat \notin [\varphi]$ であるなら $m^\flat = 1^\flat$ とすれば良いし，そうでないなら次の $2^\flat$ について同様に探していく．この手続きは $n^\flat \notin [\varphi]$ であることから必ず $n^\flat$ までには終わる．

この仮定を用いて計算すると，次が成り立つ．

$$n^\flat \vDash \Box\varphi \tag{4.I}$$

$$n^\flat \nvDash \Box\varphi \leftrightarrow \varphi \tag{4.II}$$

これらを踏まえて，x で場合分けを行う．

$x = m^\sharp$ であるときは $m^\sharp R n^\flat$ なので 式 4.II より良い．

$x = m^\flat$ で $m > n$ であるとき，$m^\flat \vDash \Box(\Box\varphi \leftrightarrow \varphi)$ と仮定すると $m^\flat R n^\flat$ であるので $n^\flat \vDash \Box\varphi \leftrightarrow \varphi$ となり 式 4.I と矛盾する． よって $m^\flat \nvDash \Box(\Box\varphi \leftrightarrow \varphi)$ であり，良い．

$x = m^\flat$ で $m \leq n$ であるとき． $m^\flat$ から行けるのは $m > k$ として $k^\flat$ のみである． このとき $n > k$ であるから，n の最小性の仮定より $k^\flat \in [\varphi]$ である．したがって $m^\flat \vDash \Box\varphi$ が成り立ち，良い．

これで任意の $x \in W$ に対して $x \vDash \Box(\Box\varphi \leftrightarrow \varphi) \to \Box\varphi$ が成り立つことが示された．

$\mathbb{N}^\flat \subseteq [\varphi]$ なら $[\varphi]$ は無限なので，補題 1.16 より $[\varphi]^c$ は有限である． $[\varphi]^c$ が空集合とすると $x \vDash \Box\varphi$ が成り立つので良い． よって $[\varphi]^c$ は空集合でないとする．

最大の $n^\sharp \in [\varphi]^c$ を取る．すなわち任意の $n < m$ で $m^\sharp \in [\varphi]$ である．

x について場合分けを行う．

$x = m^\flat$ であるとき，$m^\flat$ から行けるのは $\mathbb{N}^\flat$ の要素のみであり，$\mathbb{N}^\flat \subseteq [\varphi]$ なので $m^\flat \vDash \Box\varphi$ が成り立つ． よってよい．

$x = m^\sharp$ かつ，$n + 2 \leq m$ であるとき． このとき $m^\sharp$ から行ける世界は全て $\mathbb{N}^\flat$ の要素か，$n + 1 \leq k$ として $k^\sharp$ までである．n の最大性の仮定よりこれらの世界は全て $[\varphi]$ に含まれ，したがって $m^\sharp \vDash \Box\varphi$ が成り立つ． よってよい．

$x = m^\sharp$ かつ，$n + 1 \geq m$ であるとき． このとき，$m^\sharp \nvDash \Box(\Box\varphi \leftrightarrow \varphi)$ を示す． 定義より $m^\sharp R (n+1)^\sharp$ であるから，$(n+1)^\sharp \nvDash \Box\varphi \leftrightarrow \varphi$ が示されれば十分． 更に，最大性の仮定より $(n+1)^\sharp \vDash \varphi$ であるから，$(n+1)^\sharp \nvDash \Box\varphi$ を示せば良い．これは定義より $(n+1)^\sharp R n^\sharp$ であり，$n^\sharp \in [\varphi]^c$ なので成り立つ． 以上よりよい．

これで任意の $x \in W$ に対して $x \vDash \Box(\Box\varphi \leftrightarrow \varphi) \to \Box\varphi$ が成り立つことが示された．

どちらにしても，$x \vDash \Box(\Box\varphi \leftrightarrow \varphi) \to \Box\varphi$ が成り立つので，$M_{\mathrm{C}} \vDash \Box(\Box\varphi \leftrightarrow \varphi) \to \Box\varphi$ が成り立つ．❑

これにより，Cresswell モデルは所望の性質を満たすことが確認できたので，補題 1.7 の証明も通る．

1.3. その他

KH については他に以下のような性質が知られている．

> **命題 1.18：GL** は **KH** より真に強い． すなわち，**KH** で証明できる論理式は **GL** でも証明できるが，**GL** で証明可能であっても **KH** で証明できない論理式が存在する．

証明： 適当に計算すると，**GL** は公理 H および 4 を証明することが出来ることがわかる． 一方，補題 1.7 より 4 は **KH** では証明できない． ❑

Kripke 不完全性を起こしている原因の一つは **KH** では 4 が証明できないことにあった． では 4 を追加するとどうなるか？これは以下が知られている．

> **命題 1.19**（[3, p.113]）：**KH** に 4 を足した論理は **GL** になる．

なお, **GL** 自体も, 非反射的かつ推移的な有限フレームクラスに対して健全かつ完全ではあるが, いかなるフレームクラスに対しても強完全ではないことが知られている． 詳しくは [4, pp.57-66] を参照せよ．

参考文献

[1] G. E. Hughes and M. J. Cresswell, *A new introduction to modal logic*, Transferred to digital print. London: Routledge, 2007.

[2] G. Boolos, *The Logic of Provability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. doi: 10.1017/CBO9780511625183.

[3] 倉橋太志, “第 2 部. 証明可能性論理,” in 数学における証明と真理 *:* 様相論理と数学基礎論, 共立出版, 2016.

[4] 佐野勝彦, “第 1 部. 様相論理入門,” in 数学における証明と真理 *:* 様相論理と数学基礎論, 共立出版, 2016.

[5] 西村祐輝, “様相論理のフレーム定義可能性.” Accessed: Feb. 14, 2025. [Online]. Available: https://nishimura-yuki-website.glitch.me/modal-logic-note.html