

様相論理についての様々なメモ

SnO2WMaN

Creative Commons
Attribution 4.0
International
2025/2/19

目次

1. はじめに	1
2. 公理 M と McKinsey 的關係	1
2.1. K4M, S4M について	1
2.2. KM について	3
3. 非稠密拡大	4
4. 合流性および連結性について	5
索引	7
参考文献	8

1. はじめに

この文書は標準的な様相論理の様々な体系についてのメモである。基本的に証明などは書き途中であり、またそもそも命題の正しさについても保証はしない。誤りなどがあつたら GitHub の Issue など指摘していただけると助かる。

2. 公理 M と McKinsey 的關係

まず定義を述べていく。

定義 2.1 (様相論理の公理 M) : 以下を様相論理の公理 M とする。

$$M \equiv \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$$

定義 2.2 (McKinsey 的關係) : 2 項関係 R が以下を満たすなら、 R は McKinsey 的であるという。

$$\forall x. \exists y. [xRy \wedge \forall z. [yRz \rightarrow y = z]]$$

注意 2.3 : Kripke フレームの言葉で言えば、 R が McKinsey 的であるなら、全ての点が終点として simple なクラスターに辿り着くことが保証される。

2.1. K4M, S4M について

公理 M を含む体系のうち、K4M, S4M は比較的行儀の良い体系である。

定義 2.4 (様相論理 K4M, S4M) :

- $K4M = K4 \oplus M$
- $S4M = S4 \oplus M$

注意 2.5 : C&Z では **K4M** は **K4.1**, **S4M** は **S4.1** となっている。しかし歴史的経緯で違う公理を足したものを **S4.1** と呼ぶ文献 [1] もあり紛らわしいため、このメモでは **K4M**, **S4M** と呼ぶことにする。

定義 2.6 :

- 推移的かつ Mckinsey 的関係のフレームクラスを $C_{\mathbf{K4M}}$ と書く。
- 前順序かつ Mckinsey 的関係のフレームクラスを $C_{\mathbf{S4M}}$ と書く。

まずは Kripke 意味論に対する健全性および無矛盾性を証明しよう。

補題 2.7 : F が Mckinsey 的なら, $F \models M$.

証明 : 対偶を証明する。すなわち, $F \not\models M$ ならば F は Mckinsey 的でないことを証明する。

証明は 2 パートに分ける。まず, $F \not\models M$ ならば F は次を満たすことを示す。

$$\exists x. \forall y. [xRy \rightarrow \exists u, v. [yRu \wedge yRv \wedge u \neq v]]$$

仮定より, ある $\Vdash, x \in F$ があって, $\langle F, \Vdash \rangle, x \not\models \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ となる。今この x が所望の x であることを示す。任意に xRy となる y を取る。 yRu, yRv かつ $u \neq v$ となる u, v が存在することを示せばよい。

定義より次が成り立つ。

$$\langle F, \Vdash \rangle, x \models \Box \Diamond p \tag{1.I}$$

$$\langle F, \Vdash \rangle, x \not\models \Diamond \Box p \tag{1.II}$$

式 1.I より, $\langle F, \Vdash \rangle, y \models \Diamond p$ が言えて, ここから $\langle F, \Vdash \rangle, u \models p$ となる u の存在を言える。

他方式 1.II より, 任意の xRz となる x' で $\langle F, \Vdash \rangle, x' \not\models \Box p$ である。 x' として y とすれば, yRv かつ $v \not\models p$ となる v の存在が言える。

このとき, $u \neq v$ であることはありえない: 仮に $u = v$ とすると, $u \models p$ かつ $u \not\models p$ となりおかしい。

以上より, yRu, yRv かつ $u \neq v$ となる u, v の存在を示せた。

次に, この性質が Mckinsey 的関係の否定を導くことを示す。

$$\exists x. \forall y. [xRy \rightarrow \exists z. [yRz \wedge y \neq z]]$$

まず, x を取ってきて, これが所望の x であることを示す。任意の xRy となる y を取る。 x の仮定より, u, v が取れて, yRu かつ yRv かつ $u \neq v$ 。 $y = u$ か否かで場合分けする。 $y = u$ であるなら z として v とすればよく, $y \neq u$ であるなら z として u とすればよい。

□

一方, 補題 2.7 の逆方向は F が推移的であることを仮定しなければならない。これにより, 推移性が保証される **K4M**, **S4M** についてのみ考えることになる。

補題 2.8 : 推移的な F で $F \models M$ なら, F は McKinsey 的である.

証明 :

□

以上より次の系 2.9 が成り立つ.

系 2.9 :

- $\{4, M\}$ は C_{K4M} を規定する.
- $\{T, 4, M\}$ は C_{S4M} を規定する.

体系の無矛盾性を示すにはフレームクラスの非空性を言えばよかった.

補題 2.10 : C_{K4M}, C_{S4M} は空でない.

証明 : 両方のケースで, 反射的な単点フレームが条件を満たす.

□

系 2.11 (K4M, S4M の Kripke 健全性および無矛盾性) : $K4M, S4M$ はそれぞれ C_{K4M}, C_{S4M} に対して健全でありかつ無矛盾である.

証明 : 系 2.9 と 補題 2.10 より従う.

□

次に Kripke 意味論に対する完全性を証明する. $K4M, S4M$ はそれぞれカノニカルであり, それから完全性が従う.

定理 2.12 : $K4M, S4M$ はそれぞれカノニカルである.

証明 :

□

定理 2.13 (K4M, S4M の Kripke 完全性) : $K4M, S4M$ はそれぞれ C_{K4M}, C_{S4M} に対して完全である.

2.2. KM について

定義 2.14 (様相論理 KM) : $KM = K \oplus M$

KM に関しては次のことが成り立つらしいが, 証明は不明.

命題 2.15 (C&Z p.138) : KM はカノニカルではない.

命題 2.16 ([1, p.367]) : $KM \subset S4M$

3. 非稠密拡大

非稠密拡大について述べる前に, まず, Post 完全性の定義を確認しよう.

定義 3.1 (Post 完全性) : 論理 L が Post 完全であるとは, 論理 L の無矛盾な真の拡大論理が存在しないことを言う.

事実 3.2 : 古典命題論理 Cl は Post 完全である.

事実 3.3 : 直観主義命題論理 Int の Post 完全な拡大論理は Cl のみである.

この定義を適当に相対化して, 次のような定義¹を考える.

定義 3.4 (正規様相論理の非稠密拡大) : L_0, L_1 は正規様相論理であり $L_0 \subset L_1$ とする. L_1 が L_0 の正規様相論理の非稠密拡大であるとは, $L_0 \subset L \subset L_1$ となる真に中間かつ無矛盾な正規様相論理 L が存在しないことを言う. 以下, 正規様相論理であることを考えていることが明らかな場合は単に非稠密拡大と呼ぶ.

注意 3.5 : 拡大された L_1 が無矛盾であるかはどうでもよいことに注意せよ.

次のことはよく知られている.

命題 3.6 : Fml は $Triv, Ver$ の非稠密拡大である.

命題 3.7 : $Triv$ および Ver は KTc の非稠密拡大である.

その他の例として, $S5$ が非稠密拡大となる $S4$ の拡大論理がある.

¹この名称はこの文書独自のもので, 他に何というのかは知らない.

定義 3.8 :

- $R1 \equiv p \rightarrow (\Diamond \Box p \rightarrow \Box p)$
- $M18 \equiv (\Diamond \Box p \rightarrow p) \vee (\Box \Diamond q \rightarrow \Diamond \Box q)$

定義 3.9 :

- $S4.4 = S4 \oplus R1$
- $S4.9 = S4.4 \oplus M18$

命題 3.10 ([1, pp.284-287], Zeman 1973, pp.273-275) : $S5$ は $S4.9$ の非稠密拡大である.

4. 合流性および連結性について

合流性および連結性を規定する様相論理についていくつか注意を述べておく.

まず, 合流性および連結的とは次のような性質である.

定義 4.1 (合流性, 連結性) :

- 2 項関係 R が**合流的**であるとは次が成り立つことを言う.

$$\forall x, y, z. [xRy, xRz \implies \exists u. [yRu, zRu]]$$

- 2 項関係 R が**連結的**であるとは次が成り立つことを言う.

$$\forall x, y, z. [xRy, xRz \implies yRz \parallel zRy]$$

定義 4.2 :

- $.2 \equiv \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$
- $.3 \equiv \Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$

事実 4.3 :

- $.2$ は合流的なフレームクラスを規定する.
- $.3$ は連結的なフレームクラスを規定する.

定義 4.4 (S4.2, S4.3) :

- $S4.2 := S4 \oplus .2$
- $S4.3 := S4 \oplus .3$

事実 4.5 :

- S4.2 は合流的な前順序のフレームクラスに対して健全かつ完全.
- S4.3 は連結的な前順序のフレームクラスに対して健全かつ完全.

ここで、合流性と連結性を弱めて、次のような性質を考える.

定義 4.6 (弱合流性, 弱連結性) :

- 2 項関係 R が**弱合流的**であるとは次が成り立つことを言う.

$$\forall x, y, z. [xRy, xRz, y \neq z \implies yRz \parallel zRy]$$

- 2 項関係 R が**弱連結的**であるとは次が成り立つことを言う.

$$\forall x, y, z. [xRy, xRz, y \neq z \implies yRz \parallel zRy]$$

補題 4.7 : 弱合流性は合流性より真に弱い性質である.

証明 : まず、フレームが合流的ならば弱合流的であることを示す. 次に弱合流的だが合流的でないフレームを構成して示す. \square

同様に,

補題 4.8 : 弱連結性は連結性より真に弱い性質である.

証明 : まず、フレームが連結的ならば弱連結的であることを示す. 次に弱連結的だが連結的でないフレームを構成する. \square

一方、次のことが成り立つ.

補題 4.9 : R が反射的なら、 R が弱合流的であることと合流的であることは同値であり、 R が弱連結的であることと連結的であることは同値となる.

証明 : \square

定義 4.10 :

- $.2w \equiv \Diamond \Box (\Box p \vee q) \rightarrow \Box \Diamond (\Diamond p \vee q)$
- $.3w \equiv \Box (p \wedge \Box p \rightarrow q) \vee \Box (q \wedge \Box q \rightarrow p)$

補題 4.11 :

- $.2w$ は弱合流的なフレームクラスを規定する.
- $.3w$ は弱連結的なフレームクラスを規定する.

証明 :

□

ここまでを踏まえると, 次のことが言える.

系 4.12 :

- $.2w$ が規定するフレームクラスと $.2$ が規定するフレームクラスは異なる.
- $.3w$ が規定するフレームクラスと $.3$ が規定するフレームクラスは異なる.
- $\{T, .2w\}$ が規定するフレームクラスと $\{T, .2\}$ が規定するフレームクラスは等しい.
- $\{T, .3w\}$ が規定するフレームクラスと $\{T, .3\}$ が規定するフレームクラスは等しい.

一方 T を含まない体系ならこの同値性は成り立たない. そしてとても紛らわしいが, 多くの文献において $K4.2, K4.3$ とは $K4$ に $.2, .3$ を追加したのではなく, $.2w, .3w$ を追加した論理である.

定義 4.13 ($K4.2, K4.3$) :

- $K4.2 := K4 \oplus .2w$
- $K4.3 := K4 \oplus .3w$

索引

M

McKinsey 的

1

P

Post 完全

4

こ

公理

$.2$

5

$.2w$

6

$.3$

5

$.3w$

6

M

1

M18

5

R1

5

よ

様相論理

K4.2

7

K4.3

7

K4M

1

KM

3

S4.2

5

S4.3

5

S4.4

5

S4.9

5

S4M

1

れ

連結的

5

弱連結的

6

ご

合流的

5

弱合流的

6

せ

正規様相論理の非稠密拡大 4

参考文献

- [1] G. E. Hughes and M. J. Cresswell, *A new introduction to modal logic*. Routledge, 2007.