様相論理 E の公理 4 による拡張の濾過法について

Mashu Noguchi

2026.5.31

PDF: `https://sno2wman.github.io/notes-on-neighborhood-semantics-filtration/main.pdf`

License: `CC BY 4.0`

目次

1. はじめに 1
2. 準備 2
  2.1. 構文論的準備 2
  2.2. **E** の完全性に至るまで 4
  2.3. フレームの特徴づけ 9
3. 濾過法 13
4. 余談: 位相空間と様相論理 22
参考文献 22

1. はじめに

様相の解釈は様々である．よく知られている様相論理にはネセシテーション $p/\Box p$ と公理 K : $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ が含まれていて，これは正規様相論理と呼ばれて盛んに研究されている．しかし，解釈によっては，ネセシテーションや公理 K は不適格な推論規則や公理だと考えることもできよう．例えば，よく知られているように **S4** や **S5** は知識や認識をうまくモデル化した論理として提案されてきた．しかし果たして本当にそうだろうか？

> **例 1.1** : 様相演算子 $\Box$ を「今日の我々が知っている」と読むことにする．例えば p は Goldbach 予想を表すとしよう．この予想は現時点では解けていないが，未来では実際に正しいとわかるかもしれない．あるいは，数学的実在論の立場を素朴に取るなら，数学的真理は我々の認知とは全く独立に成立しているはずである（人類が滅ぼうとも）．ともかく，$\vdash p$ であると仮定しよう．もし，ネセシテーションがあるなら $\vdash \Box p$ が，つまり，Goldbach 予想が正しいことを今日の我々は知っているはずだということが推論される．しかし，現状は我々は Goldbach 予想が正しいことを知らないから，この推論は奇妙だと言わざるを得ない！

ネセシテーションや公理 K を落とした論理を非正規様相論理と呼ぶ．非正規様相論理の分析で使われる意味論として**近傍意味論**[1]があり，これは大雑把には 2 項関係 $R : W \times W$ を近傍系 $N : W \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ だと拡張して議論するものである．近傍意味論でも Kripke 意味論のように有限フレーム性を議論することで決定可能性が言える．実は近傍意味論では様相次数が 1 以下の公理のみによる拡張はすべて有限モデル性を持つことが Lewis の定理（命題 2.91）として知られている．しかし，公理 4 : $\Box p \to \Box\Box p$ は様相次数が 2 であるから，この定理の範囲外である．公理 4 の拡張論理の有限フレーム性は長らく未解決のままであった (Surendonk, 1997).

このメモでは近傍意味論の基本的な事実を確認した後，公理 4 による種々の論理の拡張を近傍意味論上で濾過法によって示した Kopnev (2023) の証明を概観していく．なお，この証明はプレプリントであり査読を経ていない[2]ため，Lean で形式化して証明が通っていることを検証した[3]．その際一箇所の

[1] Scott-Montague 意味論とも呼ばれる．
[2] Kopnev はおそらくアカデミアを離れており，このプレプリントが正式に出版されるかどうかはかなり微妙である．
[3] これを書いた段階ではその形式化は https://github.com/FormalizedFormalLogic/ModalLogicNeighborhoodSemantics に置かれている．

考慮漏れがあることが判明している．近傍意味論一般の議論に関しては標準的な教科書 (Chellas, 1980, Pacuit, 2017) やオンライン上の資料 (西村, 2025) なども参照されたい．日本語訳に関しては筆者が適当につけたものであり，おそらく一般的ではない．

2. 準備

2.1. 構文論的準備

> **定義 2.1** : **論理式**は可算無限個の命題変数 $p, q, r, ..., \in \mathrm{Prop}$ および $\to, \bot, \Box$ によって帰納的に定義されるものとする．それ以外は通常の略記として定める．論理式全体の集合を Fml とする．
>
> 代入写像 $s : \mathrm{Prop} \to \mathrm{Fml}$ に対し，論理式の代入 $\varphi[s]$ は通常通り定義される．

> **定義 2.2** : $L \subseteq \mathrm{Fml}$ を**論理**と呼ぶことにする．論理 L に φ が含まれること，すなわち $\varphi \in L$ を，証明可能という記号を濫用して $L \vdash \varphi$ と書くことがある．
>
> 次の公理と推論規則を持つ論理を考える．
>
> 1. 公理 K : $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
> 2. $\dfrac{\varphi}{\varphi[s]}\,(\mathrm{Subst})$
> 3. $\dfrac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi}\,(\mathrm{MP})$
> 4. $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi}\,(\mathrm{RE})$
> 5. $\dfrac{\varphi \to \psi}{\Box\varphi \to \Box\psi}\,(\mathrm{RM})$
> 6. $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}\,(\mathrm{Nec})$
>
> いま，論理は古典命題論理 $\mathbf{Cl}$ を含み，(Subst), (MP) で閉じているものとする．
> 1. L が (RE) で閉じているとき，L は**古典的** (classical) であると言う．
> 2. L が (RM) で閉じているとき，L は**単調的** (monotonic) であると言う．
> 3. L が (Nec) で閉じていてかつ公理 K を含むとき，L は**正規** (normal) であると言う．ここで公理 K を含むとは，K の任意の代入例が L に含まれることを言う．

> **定義 2.3** : Γ は論理式の集合として，公理を意図している．次によって帰納的に定まる論理を H_Γ と書く．
>
> 1. 追加公理 Γ: 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $H_\Gamma \vdash \gamma$.
> 2. Łukasiewicz の 3 公理: 任意の $\varphi, \psi, \xi \in \mathrm{Fml}$ に対して
> $$H_\Gamma \vdash \varphi \to \psi \to \varphi$$
> $$H_\Gamma \vdash (\varphi \to \psi \to \xi) \to (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \xi)$$
> $$H_\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$
> 3. モーダスポネンス (MP):
> $$\dfrac{H_\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad H_\Gamma \vdash \varphi}{H_\Gamma \vdash \psi}\,(\mathrm{MP})$$
> 4. 規則 (RE):

$$\dfrac{H_\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{H_\Gamma \vdash \Box\psi \leftrightarrow \Box\psi}\,(\mathrm{RE})$$

5. 規則 (Subst): s は任意の代入とする．

$$\dfrac{H_\Gamma \vdash \varphi}{H_\Gamma \vdash \varphi[s]}\,(\mathrm{Subst})$$

定義 2.4 : $\mathbf{E} \coloneqq H_\emptyset$ とする．

命題 2.5 : $\mathbf{E}$ は古典的である．

定義 2.6 :
- 公理 M : $\Box(p \land q) \to (\Box p \land \Box q)$
- 公理 C : $\Box p \land \Box q \to \Box(p \land q)$
- 公理 N : $\Box\top$

定義 2.7 :

$$\mathbf{EMCN} = H_{\{\mathsf{M},\ \mathsf{C},\ \mathsf{N}\}}$$
$$\mathbf{EMC} = H_{\{\mathsf{M},\ \mathsf{C}\}}, \mathbf{EMN} = H_{\{\mathsf{M},\ \mathsf{N}\}}, \mathbf{ECN} = H_{\{\mathsf{C},\ \mathsf{N}\}},$$
$$\mathbf{EM} = H_{\{\mathsf{M}\}}, \mathbf{EC} = H_{\{\mathsf{C}\}}, \mathbf{EN} = H_{\{\mathsf{N}\}}$$

補題 2.8 : 古典的な論理 L 上で，公理 M を含むことと (RM) で閉じていることは同値である．

証明:

(M $\Longrightarrow$ (RM))

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \to \psi$}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\UnaryInfC{$\varphi \leftrightarrow \varphi \land \psi$}
\RightLabel{(RE)}
\UnaryInfC{$\Box\varphi \leftrightarrow \Box(\varphi \land \psi)$}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\UnaryInfC{$\Box\varphi \to \Box(\varphi \land \psi)$}
\AxiomC{M}
\UnaryInfC{$\Box(\varphi \land \psi) \to (\Box\varphi \land \Box\psi)$}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\BinaryInfC{$\Box\varphi \to (\Box\varphi \land \Box\psi)$}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\UnaryInfC{$\Box\varphi \to \Box\psi$}
\end{prooftree}$$

((RM) $\Longrightarrow$ M)

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\UnaryInfC{$\varphi \land \psi \to \psi$}
\RightLabel{(RM)}
\UnaryInfC{$\Box(\varphi \land \psi) \to \Box\psi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\UnaryInfC{$\varphi \land \psi \to \varphi$}
\RightLabel{(RM)}
\UnaryInfC{$\Box(\varphi \land \psi) \to \Box\varphi$}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\BinaryInfC{$\Box(\varphi \land \psi) \to \Box\varphi \land \Box\psi$}
\end{prooftree}$$

❑

補題 2.9 : 古典的な論理 L 上で，公理 N を含むことと (Nec) で閉じていることは同値である．

証明:

(N $\Longrightarrow$ (Nec))

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{φ}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\UnaryInfC{$\top \leftrightarrow \varphi$}
\RightLabel{(RE)}
\UnaryInfC{$\Box\top \leftrightarrow \Box\varphi$}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\UnaryInfC{$\Box\top \to \Box\varphi$}
\AxiomC{N}
\UnaryInfC{$\Box\top$}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\BinaryInfC{$\Box\varphi$}
\end{prooftree}
$$

((Nec) $\Longrightarrow$ N) $\top$ に (Nec) を適用すれば良い．

❑

補題 2.10 : 古典的な論理 L 上で，公理 M, C の両方を含むならば，公理 K も含む．

証明:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{C}
\UnaryInfC{$\Box(\varphi \to \psi) \land \Box\varphi \to \Box((\varphi \to \psi) \land \varphi)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\UnaryInfC{$((\varphi \to \psi) \land \varphi) \to \psi$}
\RightLabel{(RM)}
\UnaryInfC{$\Box((\varphi \to \psi) \land \varphi) \to \Box\psi$}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\BinaryInfC{$\Box(\varphi \to \psi) \land \Box\varphi \to \Box\psi$}
\RightLabel{$\mathbf{Cl}$}
\UnaryInfC{$\Box(\varphi \to \psi) \to \Box\varphi \to \Box\psi$}
\end{prooftree}
$$

❑

系 2.11 : $\mathbf{EMCN}$ は正規．

命題 2.12 : $\mathbf{K} \vdash$ M, C, N.

系 2.13 : $\mathbf{K} = \mathbf{EMCN}$.

2.2. E の完全性に至るまで

さて $\mathbf{E}$ などの非正規な様相論理に対して意味論を導入したいが，Kripke 意味論ではネセシテーションや K は勝手に成り立つから，今回の論理の分析には適さない．よって述べたように近傍意味論を導入する．

定義 2.14 : 以下を満たす組 $\langle W, N \rangle$ を近傍フレームと呼ぶ．
- W は非空．
- $N : W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$

ただしこの定義では $\Box$ や $\Diamond$ の記号の取り扱いとして直感的ではないので，次の演算を導入する．

定義 2.15 : 近傍フレーム $F \coloneqq \langle W, N \rangle$ とする．$\neg_F X$ は補集合 $W \setminus X$ を表すものとする．

$\Box_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ を次で定める．

$$\Box_F X \coloneqq \{ w \in W \mid X \in N(w) \}$$

また，$\Diamond_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ を次で定める．

$$\Diamond_F X \coloneqq \neg_F \Box_F \neg_F X$$

誤解がない範囲で $\neg_F, \Box_F, \Diamond_F$ の添字 F は省略する．

逆に，何らかの写像 $\Box_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ から近傍フレームを作ることが出来る．

> **定義 2.16 :** $\Box_F : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ を任意に取る．このとき，写像 $N : W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ を次で定める．
>
> $$N(w) := \{X \subseteq W \mid w \in \Box_F X\}$$
>
> この N による近傍フレーム $\langle W, N \rangle$ を $\Box_F$ によって生成される近傍フレームと呼び，$\langle W, \Box_F \rangle$ と表す．以下，このことを一々断らず，単に近傍フレーム $\langle W, \Box_F \rangle$ と言うことがある．

> **定義 2.17 :** 近傍フレーム $\langle W, N \rangle$ 上の付値とは $V : \mathrm{Prop} \to \mathcal{P}(W)$ のことを指す．フレーム F と F 上の付値 V の組 $\langle F, V \rangle$ を近傍モデルと呼ぶ.

付値は命題変数に対してのみ定義されているが，これを拡張して任意の論理式に対して定義する．

> **定義 2.18 (Truthset) :** 近傍モデル $\langle F, V \rangle$ とする．論理式 φ の M 上 truthset $[\![\varphi]\!]_M$ を帰納的に定義する．
>
> - $[\![p]\!]_M := V(p)$ ただし $p \in \mathrm{Prop}$.
> - $[\![\bot]\!]_M := \emptyset$.
> - $[\![\varphi \to \psi]\!]_M := \neg_F [\![\varphi]\!]_M \cup [\![\psi]\!]_M$.
> - $[\![\Box\varphi]\!]_M := \Box_F [\![\varphi]\!]_M$.

簡単な計算によって次が成り立つ．

> **命題 2.19 :**
>
> 1. $[\![\top]\!]_M = W$.
> 2. $[\![\neg\varphi]\!]_M = \neg_F [\![\varphi]\!]_M$.
> 3. $[\![\varphi \land \psi]\!]_M = [\![\varphi]\!]_M \cap [\![\psi]\!]_M$.
> 4. $[\![\varphi \lor \psi]\!]_M = [\![\varphi]\!]_M \cup [\![\psi]\!]_M$.
> 5. $[\![\Diamond\varphi]\!]_M = \Diamond_F [\![\varphi]\!]_M$.
> 6. $[\![\Box^n\varphi]\!]_M = \Box_F^n [\![\varphi]\!]_M$.
> 7. $[\![\Diamond^n\varphi]\!]_M = \Diamond_F^n [\![\varphi]\!]_M$.

> **定義 2.20 (充足関係) :** モデル M で $x \in M$ とする．論理式 φ が x で成り立つという充足関係を以下で定める．
>
> $$M, x \vDash \varphi \iff x \in [\![\varphi]\!]_M$$

> **定義 2.21 (妥当性) :** 論理式 φ の各々についての妥当性を次のように定義する．
> - φ がモデル M で妥当: $M \vDash \varphi$ とは，任意の $x \in M$ について $M, x \vDash \varphi$ であることを言う．
> - φ がフレーム F で妥当: $F \vDash \varphi$ とは，F 上の任意の付値 V について，φ が モデル $\langle F, V \rangle$ で妥当であることを言う．
> - φ がフレームクラス C で妥当: $C \vDash \varphi$ とは，任意の $F \in C$ について $F \vDash \varphi$ であることを言う．

> **命題 2.22 :**
> 1. $M \vDash \varphi \iff [\![\varphi]\!]_M = W$
> 2. $M \vDash \varphi \leftrightarrow \psi \iff [\![\varphi]\!]_M = [\![\psi]\!]_M$

Łukasiewicz の 3 公理は任意のモデルで妥当である．

> **命題 2.23 :**

1. $M \vDash \varphi \to \psi \to \varphi$
2. $M \vDash (\varphi \to \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$
3. $M \vDash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to \varphi \to \psi$

規則 (MP), (RE) はモデル上で妥当性を保存する．

命題 2.24：
- $M \vDash \varphi \to \psi$ かつ $M \vDash \varphi$ ならば $M \vDash \psi$.
- $M \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ なら $M \vDash \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$.

(K) はモデル上で常に成り立つとは限らない．

命題 2.25：$M \nvDash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ となる反例モデル M が存在する．

(Nec) は一般にモデル上で妥当性を保存しない．

命題 2.26：$M \vDash \varphi$ かつ $M \nvDash \Box\varphi$ な論理式 φ および反例モデル M が存在する．

(Subst) はフレームレベルで妥当性を保存する．

命題 2.27：$F \vDash \varphi$ なら任意の代入 s について $F \vDash \varphi[s]$

以上で健全性が示せる．

定理 2.28（**E** の健全性）：$\mathbf{E} \vdash \varphi$ ならば，任意の近傍フレーム F について $F \vDash \varphi$.

証明: 証明に関する帰納法. ❑

健全性から直ちに次が従う．

系 2.29：$\mathbf{E} \nvdash \bot$．つまり，**E** は論理として無矛盾である．

次は完全性を示す．以下では極大無矛盾集合の準備を行う．この議論は **Cl** を含めば，つまり Kripke 意味論での議論と同じなので，証明は簡単なスケッチに留める．論理 L 一般について議論する．L は古典的な無矛盾な論理とする．

定義 2.30：論理式の集合 Γ が L-矛盾であるとは，ある有限集合 $\vec{\Gamma} \subseteq \Gamma$ が存在して $L \vdash \bigwedge \vec{\Gamma} \to \bot$ となることを言う．そうでないとき，Γ は L-無矛盾であるという．

定義 2.31：論理式の集合 Γ が L-極大無矛盾とは，Γ の任意の真の拡大 $\Delta \supsetneq \Gamma$ が L-矛盾することを言う．

補題 2.32（Lindenbaum 補題）：L-無矛盾な集合 Γ に対して，$\Gamma \subseteq \Delta$ となる L-極大無矛盾集合 Δ が存在する．

証明: L-無矛盾な集合全体に $\subseteq$ で順序を入れて Zorn の補題を使え. ❑

命題 2.33：$\emptyset$ は L-無矛盾である．したがって，L-極大無矛盾集合は存在する．

命題 2.34：L は古典的とする．Γ を L-極大無矛盾な集合とする．任意の論理式 φ, ψ について，次が成り立つ．

1. $L \vdash \varphi \Longrightarrow \varphi \in \Gamma$
2. $\bot \notin \Gamma$
3. $\top \in \Gamma$
4. $\neg\varphi \in \Gamma \Longleftrightarrow \varphi \notin \Gamma$
5. $\varphi \land \psi \in \Gamma \Longleftrightarrow \varphi \in \Gamma$ and $\psi \in \Gamma$
6. $\varphi \lor \psi \in \Gamma \Longleftrightarrow \varphi \in \Gamma$ or $\psi \in \Gamma$
7. $\varphi \to \psi \in \Gamma \Longleftrightarrow [\varphi \in \Gamma \Longrightarrow \psi \in \Gamma]$

次のことを注意しておこう．

注意 2.35：L が正規なら次が成り立つ．ただしここで $\Box^{-1}\Gamma \coloneqq \{\varphi \mid \Box\varphi \in \Gamma\}$.

- $\Box\varphi \in \Gamma \Longleftrightarrow \forall\Delta \supseteq \Box^{-1}\Gamma, \varphi \in \Delta$
- $\Diamond\varphi \in \Gamma \Longleftrightarrow \exists\Delta \supseteq \Box^{-1}\Gamma$ and $\varphi \in \Delta$

正規様相論理の，つまり Kripke 意味論におけるカノニカルフレームはこの性質をそのまま R_L の定義とする．しかし今回は L は一般に正規ではないので，この事実を使うことは出来ない．

古典的な様相論理のカノニカルフレームも W_L を L-極大無矛盾集合の全体として定義する点は同じである．このとき W_L は命題 2.33 より非空であるから W_L に関しては well-defined であることに注意しておく．ではどうするのかというと，truthset のような挙動をする集合を新たに定義して定めるのである．

定義 2.36（Proofset）: 論理式 φ の L-proofset $[\![\varphi]\!]_L$ を次で定める．

$$[\![\varphi]\!]_L \coloneqq \{\Gamma \in W_L \mid \varphi \in \Gamma\}$$

命題 2.34 から，proofset は次の性質が成り立つ．

命題 2.37：

1. $[\![\top]\!]_L = W_L$.
2. $[\![\bot]\!]_L = \emptyset$.
3. $[\![\neg\varphi]\!]_L = \neg_L[\![\varphi]\!]_L$.
4. $[\![\varphi \land \psi]\!]_L = [\![\varphi]\!]_L \cap [\![\psi]\!]_L$
5. $[\![\varphi \lor \psi]\!]_L = [\![\varphi]\!]_L \cup [\![\psi]\!]_L$
6. $[\![\varphi \to \psi]\!]_L = \neg_L[\![\varphi]\!]_L \cup [\![\psi]\!]_L$.

ただし $\neg_L X \coloneqq W_L \setminus X$ である．

$\to, \leftrightarrow$ については次のことも成り立つ．

命題 2.38：

1. $[\![\varphi]\!]_L \subseteq [\![\psi]\!]_L \Longleftrightarrow L \vdash \varphi \to \psi$
2. $[\![\varphi]\!]_L = [\![\psi]\!]_L \Longleftrightarrow L \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

補題 2.39：L が M を含むとき，$[\![\varphi]\!]_L \subseteq [\![\psi]\!]_L$ ならば $[\![\Box\varphi]\!]_L \subseteq [\![\Box\psi]\!]_L$ である．

証明: 命題 2.38 と (RM) より． ❑

Kripke 意味論の場合とは異なり，実際にはカノニカルフレームという一つのフレームが定義されるのではない．近傍意味論では W_L 上のフレームがカノニカルである，という仕様を与える．つまりカノニカルフレームの候補は複数あり，また，そもそもカノニカルフレームが存在するかも実際に構成しなければならないことに注意する．特に後者は重要であり，追加公理ごとに適切にうまく構成しなければならない．とはいえ本稿で扱う公理は M, C, N, 4, T でこれらの公理についてはそれほど問題にはならない．

定義 2.40（カノニカルフレーム）：フレーム $F_L := \langle W_L, \Box_{F_L} \rangle$ が次の条件を満たすとき，F_L は L-カノニカルであるという．

$$\Box_{F_L} [\![\varphi]\!]_L = [\![\Box\varphi]\!]_L$$

定義 2.41（カノニカルモデル）：L-カノニカルフレーム F_L 上の付値 V_L を次で定める．

$$V_L(p) := [\![p]\!]_L$$

このときモデル $M_L := \langle F_L, V_L \rangle$ を F_L から定まる L-カノニカルモデルと呼ぶ．

真理補題は以下の形で述べられ，Kripke 意味論と比較すると容易に示せる．

補題 2.42（真理補題）：L-カノニカルモデル $M_L = \langle W_L, \Box_{F_L}, V_L \rangle$ に対して，M_L の truthset と L-proofset は一致する．すなわち，任意の論理式 φ について次が成立する．

$$[\![\varphi]\!]_{M_L} = [\![\varphi]\!]_L$$

証明: 論理式の構造に関する帰納法．命題変数の場合は付値の定め方から，命題論理の演算は命題 2.37 より従う．$\varphi \equiv \Box\psi$ の場合のみ示す．

$$\begin{aligned}
[\![\Box\psi]\!]_{M_L} &= \Box_{F_L} [\![\psi]\!]_{M_L} && \text{by definition of truthset} \\
&= \Box_{F_L} [\![\psi]\!]_L && \text{IH} \\
&= [\![\Box\psi]\!]_L && \text{by definition of canonical frame}
\end{aligned}$$

❑

補題 2.43：フレームクラス C が L-カノニカルフレーム F_L を含むとき，L は C に対して完全である．

証明: 対偶を示す．$L \nvdash \varphi$ とする．このとき $\{\neg\varphi\}$ は L-無矛盾であるから，補題 2.32 より，ある L-極大無矛盾集合 Γ が存在して，$\neg\varphi \in \Gamma$，つまり $\Gamma \notin [\![\varphi]\!]_L$ である．F_L から定まるカノニカルモデル M_L において，補題 2.42 から $[\![\varphi]\!]_{M_L} = [\![\varphi]\!]_L$ であるから $\Gamma \notin [\![\varphi]\!]_{M_L}$ であり，よって $M_L, \Gamma \nvDash \varphi$ である．$F_L \in C$ なので，$C \nvDash \varphi$ である． ❑

したがって今後の目的は完全性を示したいフレームクラスに属するカノニカルフレームを構成することである．

定義 2.44（最小のカノニカルフレーム）：写像 $\Box_{F_L^0}$ を次で定める．

$$\Box_{F_L^0} X := \begin{cases} [\![\Box\varphi]\!]_L & \text{if } \varphi \text{ exists s.t. } X = [\![\varphi]\!]_L \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき，フレーム $F_L^0 := \langle W_L, \Box_{F_L^0} \rangle$ は L-カノニカルフレームであることが簡単に確かめられる．よって F_L^0 を L の最小のカノニカルフレームと呼ぶ．

よって一つカノニカルフレームが構成できるので，補題 2.43 より $\mathbf{E}$ の完全性が従う．

定理 2.45（$\mathbf{E}$ の完全性）：$\mathbf{E}$ は全ての近傍フレームのクラス $C_{\mathbf{E}}$ に対して完全．

定義より明らかだが，最小のカノニカルフレームに関して次の補題として切り出しておく．

補題 2.46 : $x \in \Box_{F_L^0} X \iff \exists\varphi, X = [\![\varphi]\!]_L$ and $x \in [\![\Box\varphi]\!]_L$

2.3. フレームの特徴づけ

さてフレームに色々な性質を課したい．以下 $F \coloneqq \langle W, \Box \rangle$ を近傍フレームとし，$X, Y \subseteq W$ とする．

定義 2.47 (Monotonic) : $\Box(X \cap Y) \subseteq \Box X \cap \Box Y$ を満たす F は monotonic であるという．

補題 2.48 : フレーム F が monotonic であることは次と同値である．任意の $X, Y \subseteq W$ について

$$X \subseteq Y \Longrightarrow \Box X \subseteq \Box Y$$

証明:

($\Longrightarrow$) F が monotonic であると仮定すると $\Box(X \cap Y) \subseteq \Box X \cap \Box Y$ である．いま $X \subseteq Y$ であると仮定すると，$X \cap Y = X$ であり，よって $\Box X \cap \Box Y = \Box X$ となる．よって任意に $x \in \Box X$ を取ると $x \in \Box Y$ である．したがって $\Box X \subseteq \Box Y$ である．

($\Longleftarrow$) $X \subseteq Y$ かつ $\Box X \subseteq \Box Y$ と仮定して monotonicity を示す．(Chellas, 1980) 参照．

❑

補題 2.49 : F が monotonic であることと $F \vDash \mathsf{M}$ は同値である．

証明:

($\Longrightarrow$) 任意に F 上の付値 V と $x \in F$ を取る．このとき $x \in \Box[\![p \land q]\!]$ を仮定して $x \in \Box[\![p]\!]$ かつ $x \in \Box[\![q]\!]$ を示せばよい．$\Box[\![p \land q]\!] = \Box([\![p]\!] \cap [\![q]\!])$ だから，monotonicity より $x \in \Box[\![p]\!]$ かつ $x \in \Box[\![q]\!]$ である．

($\Longleftarrow$) 付値を適当に構成すればよい．(Chellas, 1980) 参照．

❑

注意 2.50 : 最小のカノニカルフレームは monotonic ではない．したがってこのままでは **EM** などの完全性は示せない．

定義 2.51 (Regular) : $\Box X \cap \Box Y \subseteq \Box(X \cap Y)$ を満たす F は regular であるという．

補題 2.52 : フレーム F が regular であるなら次が成立する．$1 \leq n$ として任意について $X_1, ..., X_n \subseteq W$ について

$$\Box X_1 \cap ... \cap \Box X_n \subseteq \Box(X_1 \cap ... \cap X_n)$$

証明: 素直にやれば良い． ❑

注意 2.53：$n = 0$ の場合は $W \subseteq \Box W$ すなわち $\Box W = W$ であることと同値である．これは regular であることからは従わず，contains-the-unit という別の性質になる．この細かい問題は注意 3.31 で詳しく述べる．

補題 2.54：F が regular であることと $F \vDash \mathsf{C}$ は同値である．

証明:

($\Longrightarrow$) 任意に F 上の付値 V と $x \in F$ を取る．このとき $x \in \Box[\![p]\!]$ かつ $x \in \Box[\![q]\!]$ を仮定して $x \in \Box[\![p \wedge q]\!]$ を示せばよい．regularity より $x \in \Box([\![p]\!] \cap [\![q]\!])$ であり，これは $\Box[\![p \wedge q]\!]$ に等しい．

($\Longleftarrow$) $V(p) = X, V(q) = Y$ となる付値 V を取ればよい．

❑

regularity に関しては最小のカノニカルモデルのままでも完全性が一部は示せる．

補題 2.55：L が C を含むなら，F_L^0 は regular である．

証明: $x \in F_L^0$ かつ $X, Y \subseteq W_L$ とし，$x \in \Box_{F_L^0} X$ かつ $x \in \Box_{F_L^0} Y$ を仮定する．補題 2.46 より，ある論理式 φ, ψ が存在して，$X = [\![\varphi]\!]_L$，$Y = [\![\psi]\!]_L$，$x \in [\![\Box\varphi]\!]_L$，$x \in [\![\Box\psi]\!]_L$ である．したがって $x \in \Box_{F_L^0}([\![\varphi]\!]_L \cap [\![\psi]\!]_L)$ を示せば良い．

命題 2.37 より $x \in [\![\Box\varphi \wedge \Box\varphi]\!]_L$ である．いま $L \vdash \Box\varphi \wedge \Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)$ だから命題 2.38 より $x \in [\![\Box(\varphi \wedge \psi)]\!]_L$．$F_L^0$ はカノニカルモデルだから $x \in \Box_{F_L^0}[\![\varphi \wedge \psi]\!]_L$，再び命題 2.37 より $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_L = [\![\varphi]\!]_L \cap [\![\psi]\!]_L$ であるから，$x \in \Box_{F_L^0}([\![\varphi]\!]_L \cap [\![\psi]\!]_L)$ である． ❑

系 2.56：**EC** は全ての regular な近傍フレームのクラスに対して完全である．

定義 2.57 (Contains-the-Unit ((Pacuit, 2017)))：$\Box W = W$ を満たす F は **contains-the-unit** であるという．

補題 2.58：F が contains-the-unit であることと $F \vDash \mathsf{N}$ は同値である．

証明:

($\Longrightarrow$) 任意に F 上の付値 V と $x \in F$ を取る．contains-the-unit より $x \in \Box W$ なので $[\![\top]\!] = [\![\Box\top]\!]$ であることから従う．

($\Longleftarrow$) $V(p) = W$ となる付値 V を取ればよい．

❑

同様に contains-the-unit に関しても最小のカノニカルモデルのままでも完全性が一部は示せる．

補題 2.59：L が N を含むなら，F_L^0 は contains-the-unit である．

証明: $x \in F_L^0$ とする．$x \in \Box_{F_L^0} W_L$ を示す．補題 2.46 より，ある論理式 φ が存在して，$W_L = [\![\varphi]\!]_L$ かつ $x \in [\![\Box\varphi]\!]_L$ ことを示せば十分．そのような φ として $\top$ とすればよい．前者は proofset

の定義より．後者は x の任意性と命題 2.37 から $L \vdash \top \leftrightarrow \Box\top$ を示せば十分で，それは N より従う． ❑

系 2.60： **EN** は全ての contains-the-unit な近傍フレームのクラスに対して完全である．

系 2.61： **ECN** は全ての regular かつ contains-the-unit な近傍フレームのクラスに対して完全である．

定義 2.62：$\Box X \subseteq X$ を満たす近傍フレーム F は**性質 (T) を満たす**という．

定義 2.63：$\Box X \subseteq \Box\Box X$ を満たす近傍フレーム F は**性質 (4) を満たす**という．

注意 2.64： (Kopnev, 2023) では反射的とか推移的という用語を使っているが，全然直感的でないのでここでは使わない．この用法は (Chellas, 1980) に従う．

Kripke 意味論と同じように，Geach 公理にとしてより一般的な性質も考えられる．

定義 2.65： $\Diamond_F^i \Box_F^m X \subseteq \Box_F^j \Diamond_F^n X$ を満たす近傍フレーム F は**性質 $(\mathbf{G}^{i,j,m,n})$ を満たす**という．

補題 2.66： F が性質 $(\mathrm{G}^{i,j,m,n})$ を満たすことと $F \vDash \Diamond^i \Box^m p \to \Diamond^j \Box^n p$ は同値である．

証明: やれば出来る． ❑

補題 2.67：
- L が T を含むなら F_L^0 は性質 (T) を満たす．
- L が 4 を含むなら F_L^0 は性質 (4) を満たす．

注意 2.68： Geach 公理一般で F_L^0 が性質 $(\mathrm{G}^{i,j,m,n})$ を満たすとは限らない．公理 5 などについて示すにはもう少し工夫してカノニカルなフレームを構成する必要がある．さらに言えば B に関しては (Chellas, 1980) に書かれた方法ではどう工夫して構成しても上手く示せない気がする．

系 2.69： **ET**, **E4** などはしかるべき性質を持つ近傍フレームのクラスに対して完全である．

EM の拡張の完全性を示すことに戻る．まず，monotonic でないフレームを monotonic にする操作がある．

定義 2.70（補強）: フレーム $F := \langle W, N \rangle$ に対し，写像 $N^+ : W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ を次で定める．

$$X \in N^+(w) \iff \exists Y \subseteq X, Y \in N(w)$$

このとき，フレーム $F^+ := \langle W, N^+ \rangle$ を F の**補強（supplementation）**と呼ぶ．

命題 2.71： $x \in \Box_{F^+} X \iff \exists Y \subseteq X, x \in \Box_F Y$

補題 2.72： F^+ は monotonic である．

証明: $X \subseteq Y \subseteq F$ とする．$x \in \Box_{F^+} X$ とすると，ある $Z \subseteq X$ が存在して $x \in \Box_F Z$ である．このとき $Z \subseteq Y$ でもあるから，$x \in \Box_{F^+} Y$ である．したがって $\Box_{F^+} X \subseteq \Box_{F^+} Y$ である． ❑

補強されたフレームはいくつかの性質を保存する．詳細は (Chellas, 1980) を参照のこと．

命題 2.73 : F が regular なら F^+ も regular である．

命題 2.74 : F が contains-the-unit なら F^+ も contains-the-unit である．

命題 2.75 : F が (T) を満たすなら F^+ も (T) を満たす．

命題 2.76 : F が (4) を満たすなら F^+ も (4) を満たす．

定義 2.77 : 最小のカノニカルフレームの補強 $\left(F_L^0\right)^+$ を L の補強された最小のカノニカルフレームと呼んで，F_L^1 と表す．

定理 2.78 : L が M を含むなら，F_L^1 は L-カノニカルフレームである．

証明: 任意に $X \in W_L$ と φ を取る．

($\subseteq$) $\Box\varphi \in X$ と仮定して $X \in \Box_{F_L^1} [\![\varphi]\!]_L$ を示す．このとき，$Y \subseteq X$ で $Y \in \Box_{F_L^0} [\![\varphi]\!]_L$ となる Y を見つければよく，$Y = X$ とすればよい．

($\supseteq$) $X \in \Box_{F_L^1} [\![\varphi]\!]_L$ とする．このとき，補題 2.46 などより，ある $\Box\psi \in X$ が存在し，$[\![\psi]\!]_L \subseteq [\![\varphi]\!]_L$ が言える．補題 2.39 より $[\![\Box\psi]\!]_L \subseteq [\![\Box\varphi]\!]_L$ であるから $X \in [\![\Box\varphi]\!]_L$ である．つまり $\Box\varphi \in X$ である．

❑

系 2.79 : $\mathbf{EM}$ は全ての monotonic な近傍フレームのクラスに対して完全である．

系 2.80 : $\mathbf{EMC}, \mathbf{EMN}, \mathbf{EMCN}$ などもしかるべき性質を持つ近傍フレームのクラスに対して完全である．

フレーム条件が特定できているので，$\mathbf{E}$ から $\mathbf{EMCN}$ までの拡張に関してそれぞれ別個に反例モデルを構成して論理を分離出来る．ここまでのことを纏めておくと，次のことが言える．

系 2.81 : 8 つの論理 $\mathbf{E}, \mathbf{EM}, \mathbf{EC}, \mathbf{EN}, \mathbf{EMC}, \mathbf{EMN}, \mathbf{ECN}, \mathbf{EMCN}$ はそれぞれ完全であり，互いに異なる論理である．

逆に，regular でないフレームを regular にする操作もある．

定義 2.82（合併閉包）: フレーム $F := \langle W, N \rangle$ に対し，写像 $N^- : W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ を次で定める．

$$X \in N^-(w) \iff \exists \vec{Y}, \vec{Y} \neq \emptyset \text{ and } X = \bigcap \vec{Y} \text{ and } \forall Y \in \vec{Y}, Y \in N(w)$$

このとき，フレーム $F^- := \langle W, N^- \rangle$ を F の**合併閉包（intersection closure）**と呼ぶ．

命題 2.83：F^- は regular である．

最後に，monotonicitiy と regularity の両方を回復する操作を考える．その前に一つ重要な補題を示す．

命題 2.84：F の補強の合併閉包 $(F^+)^-$ は F の合併閉包の補強 $(F^-)^+$ に等しい．

証明: (Chellas, 1980) 参照. ❑

定義 2.85 (**疑フィルター**)：フレーム F の補強の合併閉包 $(F^+)^-$ あるいは合併閉包の補強 $(F^-)^+$ を F の**疑フィルター** (pseudo-filter) と呼び，$F^\pm$ と表す．どちらで定義しても同じことは命題 2.84 から従う．

補題 2.86：$F^\pm$ は monotonic かつ regular である．

証明: monotonic であることは補題 2.72 より従う．regular であることは合併閉包によって生じる regularity (命題 2.83) が補強でも保存されること (命題 2.73) から従う． ❑

疑フィルターもいくつかの性質を保存する．詳細はやはり (Chellas, 1980) を参照のこと．

命題 2.87：F が contains-the-unit なら $F^\pm$ も contains-the-unit である．

命題 2.88：F が (4) を満たすなら $F^\pm$ も (4) を満たす．

注意 2.89：合併併合は (T) を壊してしまうため，(T) に関しては保存されない．これが理由で **ECT4** などの FFP を濾過法で示すことが出来ない．

補題 2.90：$x \in \Box_F X \Longrightarrow x \in \Box_{F^\pm} X$

最後に，実は次の強烈な結果が成り立つことを述べておく．

命題 2.91 (**Lewis の定理, Lewis (1974)**)：**E** を含む様相次数 1 以下の公理のみによる拡張は FMP を持つ．

証明 (**スケッチのみ**)：そのような拡張では $2^{|\mathrm{Sub}(\varphi)|}$ 個以下の状態しか持たない φ の有限反例モデルを直接構成できる．詳細は例えば (Pacuit, 2017) を参照のこと． ❑

例えば，公理 T は様相次数 1 以下の公理であるから **ET** は FFP を持つ．しかし 公理 4 は様相次数 2 の公理であるから，Lewis の定理は適用できない．よって **E4** が FFP を持つかは別の方法で示す必要がある．その方法が濾過法である．

3. 濾過法

濾過法は Kripke 意味論で有限フレーム性を示す重要な手法であった．近傍意味論においても同様の手法が存在する．

定義 3.1：論理式の集合 Σ が部分論理式で閉じているとは，任意の $\varphi \in \Sigma$ に対して $\mathrm{Sub}(\varphi) \subseteq \Sigma$ が成り立つことをいう．

この章では Σ を部分論理式で閉じた論理式の集合として固定する（実際上は $\mathrm{Sub}(\varphi)$ とすればよい）．諸々の定義について本来であれば Σ を添字付けるべきだが，あまりにも煩雑になるので省略する．

定義 3.2： $M := \langle W, \Box \rangle$ を近傍モデルとする．
W 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff \forall \varphi \in \Sigma, x \vDash \varphi \iff y \vDash \varphi$$

で定める．これが同値関係であることの確認は容易なので省略する．
$\widetilde{\varphi}$ で φ の $\sim$ による同値類を表すとする．また $X \subseteq W$ に対して $\widetilde{X} := \{\widetilde{x} \mid x \in X\}$ と定める．

計算によって次のことが成り立つことが確認できる．

命題 3.3： $X, Y \subseteq W$，$x \in W$ とする．次のことが成り立つ．

1. $x \in X \Longrightarrow \widetilde{x} \in \widetilde{X}$
2. $x \in [\![\varphi]\!]_M \iff \widetilde{x} \in \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$
3. $\widetilde{X \cup Y} = \widetilde{X} \cup \widetilde{Y}$
4. $\widetilde{X \cap Y} \subseteq \widetilde{X} \cap \widetilde{Y}$
5. $\varphi \in \Sigma$ なら $\widetilde{\neg [\![\varphi]\!]_M} = \neg\left(\widetilde{[\![\varphi]\!]_M}\right)$
6. $\psi \in \Sigma$ かつ $\widetilde{[\![\varphi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\psi]\!]_M}$ なら $[\![\varphi]\!]_M \subseteq [\![\psi]\!]_M$
7. $\varphi, \psi \in \Sigma$ かつ $\widetilde{[\![\varphi]\!]_M} = \widetilde{[\![\psi]\!]_M}$ なら $[\![\varphi]\!]_M = [\![\psi]\!]_M$
8. $\widetilde{W} = W/\sim$

命題 3.4： M が contains-the-unit であるならば，$\widetilde{[\![\Box\top]\!]} = W/\sim$ である．

命題 3.5： M が monotonic のとき，$\widetilde{[\![\varphi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\psi]\!]_M}$ ならば $\widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ である．

命題 3.6： M が (T) なら $\widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ である．

命題 3.7： M が (4) なら $\widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\Box\Box\varphi]\!]_M}$ である．

さて濾過フレーム及び濾過モデルの定義を行う．

定義 3.8（濾過フレーム及び濾過モデル）： $W/\sim$ 上のフレーム $F^{\mathrm{F}} = \langle W/\sim, \Box^{\mathrm{F}} \rangle$ が以下を満たすとき M の濾過フレームと呼ぶ：任意の $\Box\varphi \in \Sigma$ に対し，

$$\Box^{\mathrm{F}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M} = \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$$

濾過フレーム F^{F} 上の付値 $V^{\mathrm{F}} : \mathrm{Prop} \to \mathcal{P}(W/\sim)$ を次で定める．

$$V^{\mathrm{F}}(p) = \widetilde{V(p)}$$

この付値によって定まるモデル $M^{\mathrm{F}} := \langle F^{\mathrm{F}}, V^{\mathrm{F}} \rangle$ を M の濾過モデルと呼ぶ．

Σ が有限集合であれば，F^{F} は有限フレームであることに注意する．さて，濾過モデルの最も重要な性質が次の補題 3.9 である．

補題 3.9（濾過補題）： M^{F} を M の濾過モデルとし，$\varphi \in \Sigma$ とする．このとき

$$\widetilde{[\![\varphi]\!]_M} = [\![\varphi]\!]_{M^{\mathrm{F}}}$$

つまり，任意の $x \in M$ に対して

$$M, x \vDash \varphi \Longleftrightarrow M^{\mathrm{F}}, \widetilde{x} \vDash \varphi$$

証明: 論理式の帰納法による．$\varphi \equiv \Box\psi$ のときだけ示す．

$$\begin{aligned}
\widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M} &= \Box^{\mathrm{F}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M} && \text{by definition of filtration} \\
&= \Box^{\mathrm{F}} [\![\psi]\!]_{M^{\mathrm{F}}} && \text{by IH} \\
&= [\![\Box\psi]\!]_{M^{\mathrm{F}}} && \text{by definition of truthset}
\end{aligned}$$

❑

補題 3.10： $\Box\varphi \in \Sigma$ ならば，$\Box^{\mathrm{F}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M} = \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$

証明:

$$\begin{aligned}
\Box^{\mathrm{F}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M} &= \Box^{\mathrm{F}} [\![\varphi]\!]_{M^{\mathrm{F}}} && \text{補題 3.9} \\
&= [\![\Box\varphi]\!]_{M^{\mathrm{F}}} && \text{by definition of truthset} \\
&= \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M} && \text{補題 3.9}
\end{aligned}$$

❑

定義 3.8 は濾過フレームの仕様を定めているだけに過ぎないので，実際には何かしら濾過フレームを構成する必要がある．次の定義は最も簡単な濾過フレームを一つ与える．

定義 3.11（最小の濾過フレーム）： $M = \langle W, \Box_M, V \rangle$ とする．次の $\Box_{F^{\mathrm{S}}}$ によって定まる $F^{\mathrm{S}} := \langle W/\sim, \Box_{F^{\mathrm{S}}} \rangle$ を M の最小の濾過フレームと呼ぶ．

$$\Box_{F^{\mathrm{S}}} X = \begin{cases} \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M} \text{ if some } \Box\varphi \in \Sigma \text{ s.t. } X = \widetilde{[\![\varphi]\!]_M} \\ \emptyset \end{cases}$$

F^{S} から自然に定まる濾過モデル $M^{\mathrm{S}} := \langle F^{\mathrm{S}}, V^{\mathrm{S}} \rangle$ を M の最小の濾過モデルと呼ぶ．

これが濾過フレームであることは明らかなので，まず次のことがわかる．

定理 3.12： $\mathbf{E}$ は有限フレーム性を持つ．

証明: 対偶を示す．$\varphi \notin \mathbf{E}$ とすると，$\mathbf{E}$ の完全性より，有限とは限らないフレーム上のモデル M および $x \in M$ によって $M, x \nvDash \varphi$．このとき，$\Sigma := \mathrm{Sub}(\varphi)$ として M から最小の濾過モデル M^{S} を構成すれば，補題 3.9 より $M^{\mathrm{S}}, \widetilde{x} \nvDash \varphi$ が成り立つ．$\mathrm{Sub}(\varphi)$ は有限集合なので，これは有限反例モデルである． ❑

定理 3.12 の証明は，構成する濾過モデルを変更し，そのモデルが所望のフレームクラスに含まれることを示せば，別の論理に対しても同様に有限モデル性を示すことが出来る．

さて，最小の濾過モデルでは元のモデルが持っていた性質，例えば monotonicity は失われてしまう．monotonicity は補強によって回復することが出来ることを思い出そう．ここからの議論は (Kopnev, 2023) による．まず性質 (4) を満たす濾過モデルを作っていく．

定義 3.13（closure）：$F \coloneqq \langle W, \Box_F \rangle$ に対して，写像 $\widehat{\Box_F} : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ を次で定める．

$$\widehat{\Box_F} X = \begin{cases} X \text{ if } X = \Box_F Y \text{ for some } Y \subseteq W \\ \emptyset \ \ \text{otherwise} \end{cases}$$

定義 3.14：$M \coloneqq \langle W, \Box_M, V \rangle$ は (4) を満たすとする．次の $\Box_{F^{(4)}}$ によって定まる $F^{(4)} \coloneqq \langle W/\sim, \Box_{F^{(4)}} \rangle$ を M の推移的濾過フレームと呼ぶ．

$$\Box_{F^{(4)}} X \coloneqq \Box_{F^{\mathrm{S}}} X \cup \widehat{\Box_{F^{\mathrm{S}}}} X$$

$F^{(4)}$ は後で確認するように M の濾過フレームであり，したがって自然に定義される濾過モデル $M^{(4)} \coloneqq \langle F^{(4)}, V^{(4)} \rangle$ を M の推移的濾過モデルと呼ぶ．

煩雑なので技術的な補題を 2 つ用意する．

補題 3.15：$\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)}} X$ であることは，次のどちらかが成立することと同値である．
1. ある $\Box\varphi \in \Sigma$ が存在し，$X = \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ かつ $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ である．
2. ある $\Box\varphi \in \Sigma$ が存在し，$X = \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ かつ $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ である．

証明: 定義より． ❑

補題 3.16：$\varphi, \Box\psi \in \Sigma$ とし，F^{F} が M の濾過フレームであるとする．このとき，$\widetilde{[\![\varphi]\!]_M} = \Box_{F^{\mathrm{F}}} \widetilde{[\![\psi]\!]_M}$ ならば，$\widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M} = \widetilde{[\![\Box\Box\psi]\!]_M}$ である．

証明: 補題 3.10 より $\Box_{F^{\mathrm{F}}} \widetilde{[\![\psi]\!]_M} = \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ だから $\widetilde{[\![\varphi]\!]_M} = \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$．よって命題 3.3 の 7. より $[\![\varphi]\!]_M = [\![\Box\psi]\!]_M$ である．よって $\Box_M [\![\varphi]\!]_M = \Box_M [\![\Box\psi]\!]_M$ であるから，truthset の定義より $[\![\Box\varphi]\!]_M = [\![\Box\Box\psi]\!]_M$ である．よって $\widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M} = \widetilde{[\![\Box\Box\psi]\!]_M}$ である． ❑

それでは $F^{(4)}$ が濾過フレームであることを示そう．

補題 3.17：$F^{(4)}$ は M の濾過フレームである．

証明: 任意に $\Box\varphi \in \Sigma$ を取り，$\Box_{M^{(4)}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M} = \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ を示す．

($\subseteq$) $\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ とする．このとき定義より $\widetilde{x} \in \Box_{F^{\mathrm{S}}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ あるいは $\widetilde{x} \in \widehat{\Box_{F^{\mathrm{S}}}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ である．

前者の場合は F^{S} は濾過フレームなので $\Box_{F^{\mathrm{S}}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M} = \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ であるから従う．

後者の場合を考えると $\widehat{\Box_{F^{\mathrm{S}}}}$ の定義から，ある Y が存在して $\widetilde{[\![\varphi]\!]_M} = \Box_{F^{\mathrm{S}}} Y$ であり，かつ $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ である．したがって更に $\Box_{F^{\mathrm{S}}}$ の定義より，$\Box\psi \in \Sigma$ が存在して，$Y = \widetilde{[\![\psi]\!]_M}$ であり，かつ $\Box_{F^{\mathrm{S}}} Y = \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ である．つまり整理すると，$\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ が言える．M が (4) を満たすので，$[\![\Box\psi]\!]_M \subseteq [\![\Box\Box\psi]\!]_M$ であり，ここから $\widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\Box\Box\psi]\!]_M}$ が言えるため，$\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\Box\psi]\!]_M}$ である．$\varphi, \Box\psi \in \Sigma$ であり，$\widetilde{[\![\varphi]\!]_M} = \Box_{F^{\mathrm{S}}} \widetilde{[\![\psi]\!]_M}$ であるから，補題 3.16 より $\widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M} = \widetilde{[\![\Box\Box\psi]\!]_M}$ である．よって $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_F}$ である．

($\supseteq$) $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ とする．F^{S} は濾過フレームだから $\widetilde{x} \in \Box_{F^{\mathrm{S}}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$．よって $\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ である．

よって示された． ❑

補題 3.18：$F^{(4)}$ は (4) を満たす．

証明: 任意に X を取る．$\Box_{F^{(4)}} X \subseteq \Box_{F^{(4)}}\Box_{F^{(4)}} X$ を示す．$\Box_{F^{\mathrm{s}}} X = \emptyset$ かどうかで場合分けする．

($\Box_{F^{\mathrm{s}}} X = \emptyset$) $\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)}} X$ とする．$\Box_{F^{\mathrm{s}}} X = \emptyset$ であるから，定義より $\widetilde{x} \in \widehat{\Box_{F^{\mathrm{s}}}} X$ である．ゆえに $\widehat{\Box_{F^{\mathrm{s}}}} X = X$ である．$\Box_{F^{\mathrm{s}}} X \subseteq X$ であるから，

$$\begin{aligned}\Box_{F^{(4)}}\Box_{F^{(4)}} X &= \Box_{F^{\mathrm{s}}}\big(\Box_{F^{\mathrm{s}}} X \cup \widehat{\Box_{F^{\mathrm{s}}}} X\big) \cup \widehat{\Box_{F^{\mathrm{s}}}}\big(\Box_{F^{\mathrm{s}}} X \cup \widehat{\Box_{F^{\mathrm{s}}}} X\big) \\ &= \Box_{F^{\mathrm{s}}} X \cup \widehat{\Box_{F^{\mathrm{s}}}} X \\ &= \Box_{F^{\mathrm{s}}} X \cup X \\ &= X\end{aligned}$$

よって $\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)}}\Box_{F^{(4)}} X = X = \widehat{\Box_{F^{\mathrm{s}}}} X$ であり，ゆえに $\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)}}\Box_{F^{(4)}} X$ であり，$\Box_{F^{(4)}} X \subseteq \Box_{F^{(4)}}\Box_{F^{(4)}} X$ である．

($\Box_{F^{\mathrm{s}}} X \neq \emptyset$) まず $\Box_{F^{\mathrm{s}}} X = \Box_{F^{(4)}} X$ を示す．

($\subseteq$) 明らか．

($\supseteq$) $\widetilde{x} \in \widehat{\Box_{F^{\mathrm{s}}}} X$ ならば $\widetilde{x} \in \Box_{F^{\mathrm{s}}} X$ を示せば十分．$\widetilde{x} \in \widehat{\Box_{F^{\mathrm{s}}}} X$ であるから，ある Y が存在して $X = \Box_{F^{\mathrm{s}}} Y$ であり，かつ $\widetilde{x} \in \Box_{F^{\mathrm{s}}} Y$ である．ここから更に，$\Box\psi \in \Sigma$ が存在して，$Y = \widetilde{[\![\psi]\!]}_M$ であり，かつ $\Box_{F^{\mathrm{s}}} Y = \widetilde{[\![\Box\psi]\!]}_M$ である．整理すると，$\Box_{F^{\mathrm{s}}} X = \Box_{F^{\mathrm{s}}}\Box_{F^{\mathrm{s}}} \widetilde{[\![\psi]\!]}_M$ であり，$\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]}_M$ である．(4) より，$\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\Box\psi]\!]}_M$ である．

他方，いま $\Box_{F^{\mathrm{s}}} X \neq \emptyset$ であるから，$\Box\chi \in \Sigma$ が存在し，$X = \widetilde{[\![\chi]\!]}_M$ であり，かつ $\Box_{F^{\mathrm{s}}} X = \widetilde{[\![\Box\chi]\!]}_M$ である．先程の等式と合わせると，$\widetilde{[\![\chi]\!]}_M = X = \Box_{F^{\mathrm{s}}} Y = \Box_{F^{\mathrm{s}}} \widetilde{[\![\psi]\!]}_M$ であり，$\Box\psi, \Box\chi \in \Sigma$ なので補題 3.16 より $\widetilde{[\![\Box\chi]\!]}_M = \widetilde{[\![\Box\Box\psi]\!]}_M$ である．

したがって $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\Box\psi]\!]}_M = \widetilde{[\![\Box\chi]\!]}_M = \Box_{F^{\mathrm{s}}} X$ である．よって示された．

この同値性を利用して以下のように示される．

$$\begin{aligned}\Box_{F^{(4)}} X &= \Box_{F^{\mathrm{s}}} X \\ &\subseteq \Box_{F^{(4)}} X \cup \Box_{F^{(4)}}\Box_{F^{(4)}} X && (1.\mathrm{I}) \\ &\subseteq \Box_{F^{(4)}}\Box_{F^{\mathrm{s}}} X && (1.\mathrm{II}) \\ &= \Box_{F^{(4)}}\Box_{F^{(4)}} X\end{aligned}$$

❑

補題 3.19：$\Box\top \in \Sigma$ かつ，F は contains-the-unit なら，$F^{(4)}$ も contains-the-unit である．

証明: 任意に $\widetilde{x} \in W/\sim$ を取る．このとき
1. $\Box\top \in \Sigma$.
2. $W/\sim = \widetilde{[\![\top]\!]}_M$.
3. 命題 3.4 より $W/\sim = \widetilde{[\![\Box\top]\!]}_M$ なので $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\top]\!]}_M$.

が成り立っている．補題 3.15 の 1. 側が成り立つので $\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)}}(W/\sim)$ が成り立つ． ❑

補題 3.20：F が (T) を満たすなら，$F^{(4)}$ も (T) を満たす．

証明: $\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)}} X$ を取る．$\widetilde{x} \in X$ を示す．補題 3.15 より次のいずれかが成立する．
1. ある $\Box\varphi \in \Sigma$ が存在し，$X = \widetilde{[\![\varphi]\!]}_M$ かつ $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]}_{M^{\mathrm{s}}}$ である．
2. ある $\Box\varphi \in \Sigma$ が存在し，$X = \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]}_M$ かつ $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]}_{M^{\mathrm{s}}}$ である．

(1.) 命題 3.6 から $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\varphi]\!]_{M^{\mathrm{s}}}}$ が言えるので良い．

(2.) 明らか．

よって $\Box_{F^{(4)}} X \subseteq X$. ❑

定理 3.21： $\mathbf{E4}, \mathbf{ET4}, \mathbf{EN4}, \mathbf{ENT4}$ は有限フレーム性を持つ．

証明: $F^{(4)}$ を使って定理 3.12 と同様に示す．ただし N を含む場合は $\Box\top$ を Σ に含めておく． ❑

推移的濾過フレームを補強すると monotonic な濾過フレームが得られる．

定義 3.22： monotonic かつ (4) を満たすモデル M から定まる $F^{(4)}$ を補強したフレーム $\left(F^{(4)}\right)^+$ を $F^{(4)+}$ と書く．このフレームは後で確認するように M の濾過フレームであり，したがって自然に定義される濾過モデル $\langle F^{(4)+}, V^{(4)+}\rangle$ を $M^{(4)+}$ と書く．

補題 3.23： $F^{(4)+}$ は濾過フレームである．

証明: 任意に $\Box\varphi \in \Sigma$ を取る．補強の定義より，$\bigcup\left\{X \mid \exists Y \subseteq \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}, \Box_{M^{(4)}} Y = X\right\} = \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ であることを示せば十分である．

($\subseteq$) 任意に $\widetilde{x} \in \bigcup\left\{X \mid \exists Y \subseteq \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}, \Box_{M^{(4)}} Y = X\right\}$ を取る．整理すると，ある $Y \subseteq \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ が存在して，$\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)}} Y$ である．さて補題 3.15 より次のいずれかが成立する．
1. ある $\Box\psi \in \Sigma$ が存在し，$Y = \widetilde{[\![\psi]\!]_M}$ かつ $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ である．
2. ある $\Box\psi \in \Sigma$ が存在し，$Y = \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ かつ $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ である．

(1.) 状況を整理すると $\widetilde{[\![\psi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ であるから，M が monotonic であることから命題 3.5 より $\widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ である．よって $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ である．

(2.) 状況を整理すると $\widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ であるから，やはり命題 3.5 より $\widetilde{[\![\Box\Box\psi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ である．M が (4) を満たすことから命題 3.7 より $\widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\Box\Box\psi]\!]_M}$ である．ゆえに $\widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M} \subseteq \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ であり，$\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ であるから，$\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ である．

いずれにせよ $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ である．

($\supseteq$) 任意に $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ を取る．このとき $\Box_{F^{(4)}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ について考えると次のことが言える．

($\Box_{F^{(4)}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M} \in \bigcup\left\{X \mid \exists Y \subseteq \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}, \Box_{M^{(4)}} Y = X\right\}$) X として $\widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ を取れば良い．

($\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$) 補題 3.10 より $\widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M} = \Box_{F^{(4)}} \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ であるから従う．

したがって $\widetilde{x} \in \bigcup\left\{X \mid \exists Y \subseteq \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}, \Box_{M^{(4)}} Y = X\right\}$ である．

よって示された． ❑

注意 3.24： ここで well-definedness を証明するためには monotonicity が必要であることに注意する．つまり実用上，$\mathbf{EM4}$ より強い論理でしか $F^{(4)+}$ を考えることは出来ない．

補題 3.25：$F^{(4)+}$ は monotonic かつ (4) を満たす．

証明: monotonic は補題 2.72 から従う．(4) は補題 3.18 と命題 2.76 から従う． ❑

補題 3.26：F が (T) を満たすなら，$F^{(4)+}$ も (T) を満たす．

証明: 補題 3.20 および命題 2.75 から従う． ❑

補題 3.27：$\Box\top \in \Sigma$ かつ，F は contains-the-unit なら，$F^{(4)+}$ も contains-the-unit である．

証明: 補題 3.19 および命題 2.74 から従う． ❑

定理 3.28：$\mathbf{EM4}, \mathbf{EMN4}, \mathbf{EMT4}, \mathbf{EMNT4}$ は有限フレーム性を持つ．

証明: $F^{(4)+}$ を使って定理 3.12 と同様に示す． ❑

定義 3.29：monotonic，regular かつ (4) を満たすモデル M から定まる $F^{(4)}$ の疑フィルター $\left(F^{(4)}\right)^{\pm}$ を $F^{(4)\pm}$ と書く．このフレームは後で確認するように M の濾過フレームであり，したがって自然に定義される濾過モデル $\langle F^{(4)\pm}, V^{(4)\pm}\rangle$ を $M^{(4)\pm}$ と書く．

補題 3.30：$F^{(4)\pm}$ は濾過フレームである．

証明: 任意に $\Box\varphi \in \Sigma$ を取り，$\widetilde{x} \in F^{(4)\pm}$ を取る．$\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)\pm}}\widetilde{[\![\varphi]\!]_M} \iff \widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ を示す．

(⊇) $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ とする．このとき整理すると次が成り立っている．

- $\Box\varphi \in \Sigma$
- $\widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M} = \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$
- $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$

よって補題 3.15 の 1. 側が成り立つので $\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)}}\widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ が成り立つ．補題 2.90 より $\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)\pm}}\widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ である．

(⊆) $\widetilde{x} \in \Box_{F^{(4)\pm}}\widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ とすると，次のように Y および有限な $\vec{Y}$ を取ることが出来る．

- $Y \subseteq [\![\varphi]\!]_M$
- $\vec{Y} \neq \emptyset$
- $Y = \bigcap \vec{Y}$
- 各 $Y_i \in \vec{Y}$ について $Y_i \in \Box_{F^{(4)}}\widetilde{x}$

$\vec{Y}$ の次の要素を $\vec{V}$ と $\vec{U}$ の 2 つに分類する．

$$\vec{V} := \left\{ V_i \in \vec{Y} : \exists\psi, \Box\psi \in \Sigma \text{ and } V_i = \widetilde{[\![\psi]\!]_M} \text{ and } \widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M} \right\}$$

$$\vec{U} := \left\{ U_i \in \vec{Y} : \exists\psi, \Box\psi \in \Sigma \text{ and } U_i = \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M} \text{ and } \widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M} \right\}$$

いま，$\vec{Y} = \vec{V} \cup \vec{U}$ である．

($\vec{Y} = \vec{V} \cup \vec{U}$) ⊇ の方は明らか．⊆ の方を示す．任意に $Y_i \in \vec{Y}$ を取る．すると $Y_i \in \Box_{F^{(4)}}\widetilde{x}$ であるから，補題 3.15 より次のいずれかが成立する．

1. ある $\Box\psi \in \Sigma$ が存在し，$Y_i = \widetilde{[\![\psi]\!]_M}$ かつ $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ である．
2. ある $\Box\psi \in \Sigma$ が存在し，$Y_i = \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ かつ $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ である．

1. の場合は $Y_i \in \vec{V}$ であり，2. の場合は $Y_i \in \vec{U}$ である．よって $Y_i \in \vec{V} \cup \vec{U}$ である．

更に $\Psi, \Xi \subseteq \Sigma$ を次で定める．

$$\Psi := \left\{\psi : \Box\psi \in \Sigma \text{ and } \exists V_i \in \vec{V}, V_i = \widetilde{[\![\psi]\!]_M} \text{ and } \widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}\right\}$$

$$\Xi := \left\{\xi : \Box\xi \in \Sigma \text{ and } \exists U_i \in \vec{U}, U_i = \widetilde{[\![\Box\xi]\!]_M} \text{ and } \widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\xi]\!]_M}\right\}$$

計算により，次が示せる．

$$\left(\bigcap_{\psi\in\Psi} \widetilde{[\![\psi]\!]_M}\right) \cap \left(\bigcap_{\xi\in\Xi} \widetilde{[\![\Box\xi]\!]_M}\right) \subseteq \widetilde{[\![\varphi]\!]_M} \tag{2}$$

さてこのとき Ψ, Ξ が空集合であるかどうかで場合分けする．

$(\Psi = \Xi = \emptyset)$ このとき $\vec{V} = \vec{U} = \emptyset$ であることを示す．

$(\vec{V} = \emptyset)$ 仮に $\vec{V} \neq \emptyset$ とすると，何らかの要素 $V_i \in \vec{V}$ が存在する．つまりある $\Box\psi \in \Sigma$ が存在して，$V_i = \widetilde{[\![\psi]\!]_M}$ かつ $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]_M}$ である．故に $\psi \in \Psi$ であり，$\Psi \neq \emptyset$ となり矛盾する．

$(\vec{U} = \emptyset)$ 同様にやればよい．

よって $\vec{Y} = \vec{V} \cup \vec{U}$ だから $\vec{Y} = \emptyset$ となり矛盾する．

$(\Psi \neq \emptyset, \Xi = \emptyset)$ 任意の $\psi \in \Psi$ を取る．Ψ の定義より $x \in [\![\Box\psi]\!]_M$ である．ゆえに $x \in \bigcap_{\psi\in\Psi} [\![\Box\psi]\!]_M$ であり，更に M の regularity と **Ψ が非空でないことから**補題 2.52 より $x \in \Box_M\left(\bigcap_{\psi\in\Psi} [\![\psi]\!]_M\right)$ である．
いま $\Box_M\left(\bigcap_{\psi\in\Psi} [\![\psi]\!]_M\right) \subseteq [\![\Box\varphi]\!]_M$ が示せる．

$(\because)$ $w \in \bigcap_{\psi\in\Psi} [\![\psi]\!]_M$ とする．このとき計算すると $\widetilde{w} \in \bigcap_{\psi\in\Psi} \widetilde{[\![\psi]\!]_M}$ である．一方でいま，$\bigcap_{\xi\in\Xi} \widetilde{[\![\Box\xi]\!]_M} = W/\sim$ が成り立つ．ゆえに Eq 2 より $\widetilde{w} \in \widetilde{[\![\varphi]\!]_M}$ であるから，$w \in [\![\varphi]\!]_M$ である．w の任意性より $\bigcap_{\psi\in\Psi} [\![\psi]\!]_M \subseteq [\![\varphi]\!]_M$ である．M は monotonic であるから $\Box_M\left(\bigcap_{\psi\in\Psi} [\![\psi]\!]_M\right) \subseteq \Box_M[\![\varphi]\!]_M = [\![\Box\varphi]\!]_M$ である．よって示された．

よって $x \in [\![\Box\varphi]\!]_M$ であり，$\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\psi]\!]}$ である．

$(\Psi = \emptyset, \Xi \neq \emptyset)$ $\xi \in \Xi$ を任意に取ると，定義および (4) より $x \in [\![\Box\Box\xi]\!]_M$ であることが分かる．ゆえに $x \in \bigcap_{\xi\in\Xi} [\![\Box\Box\xi]\!]_M$ であり，やはり同様に M の regularity と **Ξ が非空でないことから**補題 2.52 より $x \in \Box_M\left(\bigcap_{\xi\in\Xi} [\![\Box\xi]\!]_M\right)$ である．いま $\Box_M\left(\bigcap_{\xi\in\Xi} [\![\Box\xi]\!]_M\right) \subseteq [\![\Box\varphi]\!]_M$ が大体同様に示せる．したがって $x \in [\![\Box\varphi]\!]_M$ であり，$\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ である．

$(\Psi \neq \emptyset, \Xi \neq \emptyset)$ 上の議論を上手く組み合わせれば良い．

いずれの場合でも $\widetilde{x} \in \widetilde{[\![\Box\varphi]\!]_M}$ を示せる．

よって示された． ❑

注意 3.31 : 太字で強調したように regularity を使う場面で集合が Ψ 及び Ξ が非空であることには注意する必要がある．(Kopnev, 2023) の証明を追う限りでは，この部分の考慮が抜けていると思われる．

注意 3.32 : ここで well-definedness を証明するためには regularity, monotonicity, (4) が必要であることに注意する．つまり **EMC4** 以上の論理でないと $F^{(4)\pm}$ では有限フレーム性を示せない．

補題 3.33 : $F^{(4)\pm}$ は regular で monotonic かつ (4) を満たす．

証明: regular と monotonic であることは補題 2.86 から従う．(4) は補題 3.18 と命題 2.88 から従う． ❑

補題 3.34 : $\Box\top \in \Sigma$ かつ F が contains-the-unit なら，$F^{(4)\pm}$ も contains-the-unit である．

証明: 補題 3.19 および命題 2.87 から従う． ❑

定理 3.35 : **EMC4**, **EMCN4** は有限フレーム性を持つ．

証明: $F^{(4)\pm}$ を使って定理 3.12 と同様に示す． ❑

注意 3.36 : F が (T) だからといって $F^{(4)\pm}$ が (T) を満たすとは限らない．つまり対応する論理である **EMCT4** および **EMCNT4** はこの方法では有限フレーム性を示せない．

今回得られた結果を整理すると図 1 の通りになる．各色は Lewis の定理 (命題 2.91), 定理 3.21, 定理 3.28, 定理 3.35 から従うことを表す．いくつかの論理に対して**濾過法によって** FFP を示せるかは不明である．(**EMCN4** = **K4** および **EMCNT4** = **S4** は Kripke 意味論の FMP から簡単に有限反例モデルを構成することが可能なはず.)

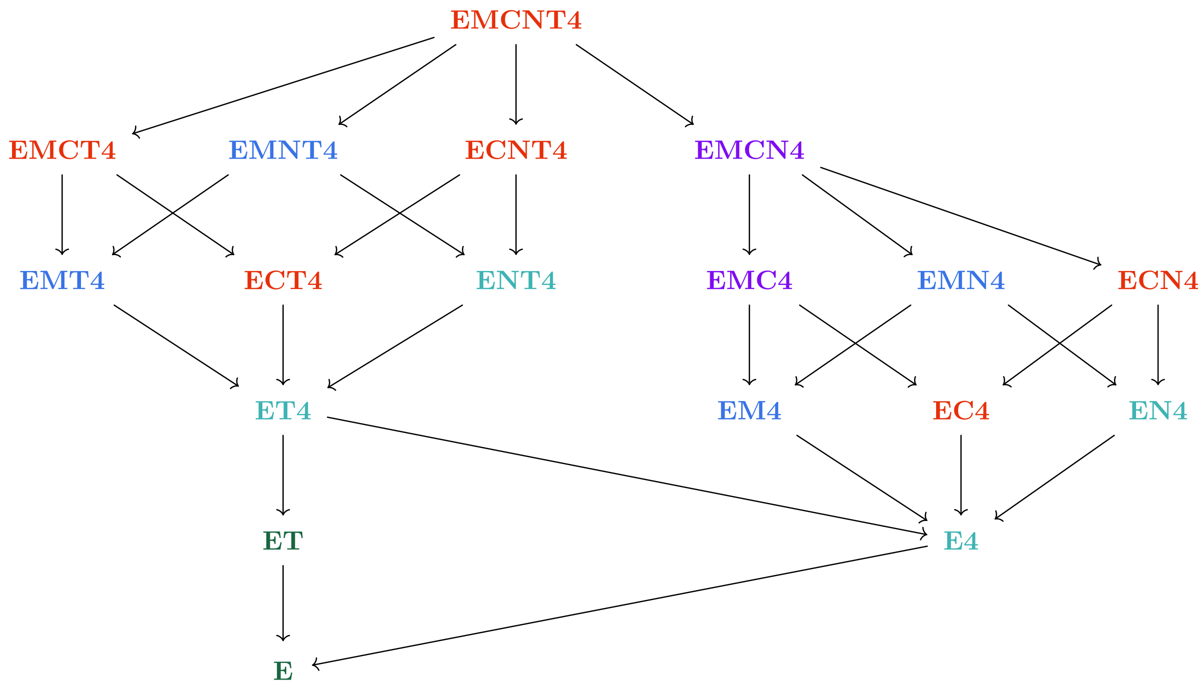

図 1: FFP by filtration

4. 余談: 位相空間と様相論理

位相空間の公理系を考えると，$\Box$ は開核作用素 (interior operator)，$\Diamond$ は閉包作用素 (closure operator) のように振る舞っていることが観察できる．

> **定義 4.1** (**Kuratowski の公理系**) : 次を満たす写像 $i : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ を Kuratowski の開核作用素という．$X, Y \subseteq W$ とする．
>
> 1. $i(W) = W$
> 2. $i(X) \subseteq X$
> 3. $i(X) \subseteq i(i(X))$
> 4. $i(X \cap Y) = i(X) \cap i(Y)$

1. が contains-the-unit，2. が (T)，3. が (4)，4. が regularity および monotonicity に対応している．普通は閉包の方で定めることが多いらしい．その場合は今まで考えてきた議論を全部 $\Diamond$ でやり直せば良い．ともあれこれによって位相空間論と様相論理に関係を見出すことが出来て，これは近傍意味論の特殊例として位相意味論という名前で知られている．

簡単な関係だけ載せておく．

> **命題 4.2** : 位相空間の部分集合に対して，開核，閉包，補集合を取る操作を有限回行って得られる集合の種類は高々 14 個である．

この命題の様相論理的な相似物は以下である．

> **命題 4.3** ((**Chagrov and Zakharyaschev, 1997, Exercise 3.14**)) : **S4** の modality は 14 個に還元できる．すなわち，$\mathbf{S4} \vdash \varphi$ であるとき，φ の先頭についている様相演算子は ε (何もついていない) か，$\Box, \Diamond, \Box\Diamond, \Diamond\Box, \Box\Diamond\Box, \Diamond\Box\Diamond, \neg, \Box\neg, \Diamond\neg, \Diamond\Box\neg, \Box\Diamond\neg, \Box\Diamond\Box\neg, \Diamond\Box\Diamond\neg$ のいずれかに還元できる．

参考文献

Chagrov, A., Zakharyaschev, M., 1997. Modal Logic, Oxford Logic Guides. Clarendon Press ; Oxford University Press, Oxford : New York.

Chellas, B.F., 1980. Modal Logic: An Introduction. Cambridge University Press, Cambridge.. https://doi.org/10.1017/CBO9780511621192

Kopnev, K., 2023. The Finite Model Property of Some Non-normal Modal Logics with the Transitivity Axiom.. https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.08605

Lewis, D., 1974. Intensional Logics without Iterative Axioms. Journal of Philosophical Logic 3.

Pacuit, E., 2017. Neighborhood Semantics for Modal Logic. Springer International Publishing, Cham.. https://doi.org/10.1007/978-3-319-67149-9

Surendonk, T.J., 1997. Canonicity for Intensional Logics Without Iterative Axioms. Journal of Philosophical Logic 26, 391–409.. https://doi.org/10.1023/A:1004201429142

西村祐輝, 2025. 近傍意味論と非正規様相論理 [WWW Document].. URL https://storage.googleapis.com/nishimura-yuki-website/modal-logic-note.html