算術の超準モデルなどに関するノート

2025.1.26

SnO2WMaN

メタ情報

- この文書のリポジトリは https://github.com/SnO2WMaN/notes-on-nonstandard です．誤植や訂正などは Issues から連絡してください．
-

目次

算術の超準モデルの性質，および Tennenbaum の定理(定理 3.4)についてのメモ．ほとんどは [1] の特に [2] の章，および [3] に基づいている．

記法 0.1: 全体を通して，以下とする．
- $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$ を算術の言語とする．
- モデル $\mathfrak{M}$ とその領域 $|\mathfrak{M}|$ を同一視することにする．
- T を $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$ における一階述語論理の理論とする．
- 通常の自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ とする．
- $\mathfrak{N}$ は算術の標準モデルとする．
- 自然数 n とその数項 $\overline{n}$ は適当に同一視する．

1. 準備

命題 1.1 (最小値原理): 空でない自然数の部分集合には必ず最小値が存在する．

定義 1.2: $\varphi(x)$ を $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$-論理式とする．次の論理式は φ に対する最小値原理という．

$$\exists x.\varphi(x) \to \exists x.[\varphi(x) \land \forall y < x.\neg\varphi(y)]$$

論理式のクラス Γ に対し，Γ のすべての論理式に対する最小値原理の集合を $\mathrm{LNP}(\Gamma)$ と書く．

$\mathbf{PA}$ では全ての算術的な論理式に対して最小値原理が成り立つ．

定理 1.3: $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{LNP}(\mathcal{L}_{\mathrm{A}})$.

注意 1.4:

- $\mathbf{I\Delta_0} + \mathrm{LNP}(\mathcal{L}_\mathrm{A}) \vdash \mathbf{PA}$.
- $\mathbf{IOpen} \vdash \mathrm{LNP}(\mathrm{Open})$.

2. 超準モデルの基本的な性質

定理 2.1: T が $\mathfrak{N}$ をモデルに持つなら，可算濃度の超準モデルを持つ.

証明: 定数記号 c を新しく $\mathcal{L}_\mathrm{A}$ に加えて $\mathcal{L}'_\mathrm{A}$ として拡張する． 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し，公理 $\{i < c \mid i \in \mathbb{N}\}$ を T に加えた公理系 T' とする.

T' が無矛盾である，すなわちモデルを持つことを示す.

> T' の任意の部分集合 S とする． このとき，適当な $n \in \mathbb{N}$ が存在し，$S \subseteq T \cup \{i < c \mid i \leq n\}$ で抑えられる． c を $n+1$ として解釈すれば $\mathfrak{N}$ は $T \cup \{i < c \mid i \leq n\}$ のモデルになるので， S もモデルを持つ． コンパクト性定理より，T' もモデルを持つ.

Löwenheim–Skolem の定理より T' は可算無限モデル $\mathfrak{M}$ を持つ． $T \subseteq T'$ より $\mathfrak{M}$ は T のモデルでもある． $\mathfrak{M}$ は $\mathcal{L}'_\mathrm{A}$ 上の構造であるので，c の $\mathfrak{M}$ 上の解釈 $c^{\mathfrak{M}}$ がある． $\mathfrak{M} \vDash T'$ より任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $(i)^{\mathfrak{M}} < c^{\mathfrak{M}}$ が成り立つので， $\mathfrak{N} \ncong \mathfrak{M}$，すなわち $\mathfrak{M}$ は超準モデルである. ❑

このあたりの証明は [4] を参考にしてほしい.

命題 2.2: $\mathbf{PA}$ の超準モデルの順序型は η を端点を持たない線形順序として，$\mathbb{N} + \mathbb{Z} \times \eta$ である.

命題 2.3: $\mathbf{I\Delta_0}$ の超準モデルの順序型は $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ である.

定義 2.4: $\mathfrak{M}'$ は $\mathfrak{M}$ の部分モデルとする． 任意の $a \in \mathfrak{M}, b \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'$ に対して $\mathfrak{M} \vDash a < b$ が成り立つとき， $\mathfrak{M}'$ は $\mathfrak{M}$ の始切片 あるいは $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{M}'$ の終拡大といい，$\mathfrak{M}' \subseteq_\mathrm{e} \mathfrak{M}$ と書く.

次のことは明らか.

命題 2.5: $\mathbf{PA}$ の任意の超準モデル $\mathfrak{M}$ に対して $\mathfrak{N} \subseteq_\mathrm{e} \mathfrak{M}$.

補題 2.6 ([3, 補題 8.3.9]): $\mathfrak{M}' \subseteq_\mathrm{e} \mathfrak{M}$ とし，Δ_0-論理式 $\varphi(\vec{x})$，$\vec{a} \in \mathfrak{M}'$ とする． このとき，$\mathfrak{M}' \vDash \varphi(\vec{a}) \iff \mathfrak{M} \vDash \varphi(\vec{a})$.

証明: φ の論理式の構成に関する帰納法. ❑

補題 2.7 ([3, 補題 8.3.10]): 補題 2.6 はΣ_1-論理式でも成り立つ.

系 2.8: T は Π_1-公理化可能な理論とする. $\mathfrak{M} \vDash T$ で $\mathfrak{M}' \subseteq_{\mathrm{e}} \mathfrak{M}'$ ならば $\mathfrak{M}' \vDash T$.

補題 2.7 から $\mathbf{PA}$ の Σ_1-完全性が成り立つ.

定理 2.9 ($\mathbf{PA}$ の Σ_1-完全性): φ は Σ_1-文とする. $\mathfrak{N} \vDash \varphi$ ならば $\mathbf{PA} \vdash \varphi$.

証明: 定理 2.1 から超準モデル $\mathfrak{M}$ が構成出来て, 命題 2.5 から $\mathfrak{N} \subseteq_{\mathrm{e}} \mathfrak{M}$ になる. 仮定より $\mathfrak{N} \vDash \varphi$ なので, これは 補題 2.7 の条件を満たすので $\mathfrak{M} \vDash \varphi$. 完全性定理より $\mathbf{PA} \vdash \varphi$. ❑

次の定理は適当な性質を満たす超準元の存在を示すためによく使う.

定理 2.10 (Overspill): $\mathfrak{M}$ は $\mathbf{PA}$ の超準モデルとする. $\mathfrak{M}' \subseteq_{\mathrm{e}} \mathfrak{M}$ とし, $\varphi(\vec{x}, y)$ は $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$-論理式, $\vec{b} \in \mathfrak{M}$ とする. このとき, 任意の $a \in \mathfrak{M}'$ に対して $\mathfrak{M} \vDash \varphi\left(a, \vec{b}\right)$ ならば, ある $c \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'$ が存在し, $\mathfrak{M} \vDash \forall x < c.\varphi\left(x, \vec{b}\right)$.

証明: 任意の $\mathfrak{M}$ の元 a で $\mathfrak{M} \vDash \varphi\left(a, \vec{b}\right)$ なら $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'$ の元を適当に取れば良い. そうでないとする. すなわち, $\mathfrak{M} \vDash \neg\varphi\left(a, \vec{b}\right)$ となる $\mathfrak{M}$ の元 a が存在すると仮定する. 最小値原理より, そのようなものの中で最小である c が存在する.

前提より $c \in \mathfrak{M}'$ とすると $\mathfrak{M} \vDash \varphi\left(c, \vec{b}\right)$ となっておかしいので, この c は $\mathfrak{M}'$ の元ではない. また, c の最小性より $\mathfrak{M} \vDash \forall x < c.\neg\varphi\left(x, \vec{b}\right)$ が成り立つ. ❑

注意 2.11: $\mathfrak{M}'$ を $\mathfrak{N}$ として大雑把に直感を述べると, $\mathbf{PA}$ で数学的帰納法によって正当化可能な事実を, 超準モデル上の適当な超準元の存在性に還元できるということを意味する.

注意 2.12: 同様に, $\mathbf{I\Delta_0}$ では Δ_0-論理式に対する overspill が成り立ち, **IOpen** では開論理式に対する overspill が成り立つ.

ある意味逆方向も成り立つ.

定理 2.13 (Underspill(?)): $\mathfrak{M}$ は $\mathbf{PA}$ の超準モデルとする. $\mathfrak{M}' \subseteq_{\mathrm{e}} \mathfrak{M}$ とし, $\varphi(\vec{x}, y)$ は $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$-論理式, $\vec{b} \in \mathfrak{M}$ とする. このとき, 任意の $a \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'$ で $\mathfrak{M} \vDash \varphi\left(a, \vec{b}\right)$ ならば, ある $c \in \mathfrak{M}'$ が存在して $\mathfrak{M} \vDash \forall x \geq c.\varphi\left(x, \vec{b}\right)$.

Overspill から次のことが一般に成り立つ（証明不明).

定理 2.14: $\mathfrak{M}$ は $\mathbf{PA}$ の超準モデルとし，$\mathfrak{M}' \subseteq_{\mathrm{e}} \mathfrak{M}$ とする． $\mathfrak{M}'$ は $\mathfrak{M}$ 上でいかなる $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$-論理式でも定義することは出来ない． すなわち，任意の $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$-論理式 $\varphi(x, \vec{y})$ と任意の $\vec{b} \in \mathfrak{M}$ に対して $\mathfrak{M}' \neq \left\{a \in \mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \vDash \varphi\left(a, \vec{b}\right)\right\}$.

注意 2.15: 特に $\mathfrak{M}'$ を $\mathfrak{N}$ とすれば，$\mathfrak{N}$ は $\mathbf{PA}$ の超準モデルの中では算術の言語でいかなる方法でも定義することが出来ない，ということを意味する． 同様に，$\mathbf{I\Delta_0}$ の超準モデルの中では $\mathfrak{N}$ は Δ_0-定義可能ではなく， $\mathbf{IOpen}$ の超準モデルの中では $\mathfrak{N}$ を開論理式で定義することが出来ない．

3. Tennenbaum の定理

定義 3.1: 再帰的可算集合 A, B が再帰的分離不能とは，次を満たすこととする．
1. $A \cap B = \emptyset$.
2. $A \subseteq C$ かつ $C \cap B = \emptyset$ となる再帰的な C は存在しない．

特に 2 の C を分離集合という．

定義 3.2: $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$ の可算モデル $\mathfrak{M}$ が $\langle \mathbb{N}; n_0, n_1; \oplus, \otimes; \lhd \rangle$ と同型であるとき，$\mathfrak{M}$ は再帰的という． ここで $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ であり，$\oplus, \otimes$ は再帰的な関数，$\lhd$ は再帰的な関係である．

次は自明である．

命題 3.3: $\mathfrak{N}$ は再帰的である．

定理 3.4 (Tennenbaum の定理): $\mathbf{PA}$ の超準モデルは再帰的ではない．

証明: 再帰的な超準モデル $\mathfrak{M}$ が存在するとして矛盾を導く．証明は次の大きく 2 ステップに分かれる．

1. 超準モデル $\mathfrak{M}$ 上では，再帰的分離不能な再帰的可算集合の分離集合とその補集合を $\mathfrak{M}$ の超準元としてエンコードできる．
2. もし $\mathfrak{M}$ が再帰的なら，再帰的な $\oplus, \otimes$ によってその超準元のコードらから元の集合へのデコードができて，これらは再帰的可算になる． よって，再帰的な分離集合が存在することとなり，これは再帰的分離不能としたことと矛盾する．

今 A, B を再帰的可算集合として再帰的分離不能であるとする． 表現定理より A, B に対して Δ_0-論理式 $\alpha(x), \beta(x)$ が存在して以下を満たす．

$$n \in A \Longleftrightarrow \mathfrak{N} \vDash \exists s.\alpha(n, s)$$
$$n \in B \Longleftrightarrow \mathfrak{N} \vDash \exists s.\beta(n, s)$$

Δ_0 論理式 $\varphi(u)$ を次のように定義する．

$$\varphi(u) \equiv (\forall x, s_1, s_2 < u).[\beta(x, s_2) \to \neg\alpha(x, s_1)]$$

このとき，$A \cap B = \emptyset$ なので任意の $n \in \omega$ に対して $\mathfrak{N} \vDash \neg\varphi(n)$ が成り立つ．Overspill(定理 2.10)より，$\mathfrak{M}$ の超準元 a が存在して $\mathfrak{M} \vDash \varphi(a)$.

$C := \{n \in \omega \mid \mathfrak{M} \vDash \exists s \leq a.\alpha(n,s)\}$ と定めると，これは A, B の分離集合になっている．

> $A \subseteq C$ を見る．$n \in A$ とすると，$\mathfrak{N} \vDash \exists s.\alpha(n,s)$ なので，適当な $m \in \omega$ が存在して $\mathfrak{M} \vDash \alpha(n,s)$ となる．$\mathfrak{N} \subseteq_{\mathrm{e}} \mathfrak{M}$ かつ $\alpha(x)$ が Δ_0-論理式なので補題 2.6 より $\mathfrak{M} \vDash \alpha(n,s)$ となる．a は $\mathfrak{M}$ の超準元なので $\mathfrak{M} \vDash m < a$ であるから，$\mathfrak{M} \vDash \exists s \leq a.\alpha(n,s)$ が成り立つ．よって $n \in C$ であり，$A \subseteq C$.

> $B \cap C = \emptyset$ を見る．$n \in B$ とすると，$\mathfrak{M} \vDash \varphi(a)$ であるから，$n \notin A$. $A \subseteq C$ だから $n \notin C$ であり，よって $B \cap C = \emptyset$.

C が再帰的であることと，C とその補集合 $\bar{C}$ が再帰的可算であることは同値である[1]．$C, \bar{C}$ をそれぞれ $\mathfrak{M}$ の超準元 $e, \bar{e}$ にエンコードする．

> まずアイデアを説明する．
>
> $p(n)$ は 0 から始めて n 番目の素数とする．C の要素を小さい順 $c_0, c_1, ...$ に列挙する．今，n 番目までの有限個の c_n までなら $e_n = \prod_n p(c_n)$ とすれば，e_n が $p(m)$ で割り切れるかどうかで $m \in C$ を判定できる．これを $n \to \infty$ に飛ばして e を作れば，無限大の値を持つが $\mathfrak{M}$ の上では適切に C の要素かを判定できる．
>
> 事実として，これらの論理式は Δ_0 である．簡単のために意図的に表記を濫用している．
> - 「n 番目の素数は m である」を表現する論理式 “$p(n) = m$”.
> - 「y は x で割り切れる」を表現する論理式 “$x|y$”.
> - 「x は C に含まれる」を表現する論理式 “$x \in C$”．これは $\exists s \leq a.\alpha(x,s)$ とすれば $A \subseteq C$ なのでよい．
>
> これらの論理式を用いてこのアイデアを形式化したものが $\psi(k)$ であり，定義より $\psi(k)$ は Δ_0-論理式である．
>
> $$\psi(k) \iff \exists e \leq a.\forall n \leq k.\exists m \leq a.[p(n) = m \wedge [m|e \leftrightarrow c \in C]]$$
>
> 任意の $n \in \omega$ に対して $\mathfrak{N} \vDash \psi(n)$ が成り立つので，補題 2.6 より $\mathfrak{M} \vDash \psi(a)$ が成り立つ．よって Overspill より $\mathfrak{M}$ の超準元 b が存在して $\mathfrak{M} \vDash \psi(b)$ が成り立つ．$\psi(b)$ の形から，さらに $\mathfrak{M}$ の超準元 e が存在して，$\mathfrak{M} \vDash \forall n \leq b.\exists m \leq a.[p(n) = m \wedge [m|e \leftrightarrow c \in C]]$ が成り立つ．
>
> この e はアイデアを実現している．すなわち，任意の $n \in \omega$ に対して，$p(n)$ で e が割り切れるかどうかで $n \in C$ を判定できる．

> 逆に $\neg\exists s \leq a.\alpha(a,s)$ とすれば「x は C に含まれない」を表現する論理式となるので，これを使って同様にやれば超準元 $\bar{e}$ も作れる．

逆に $e, \bar{e}$ から $C, \bar{C}$ をデコードする．

> $\mathfrak{M}$ は再帰的なので，$\langle \mathbb{N}; n_0, n_1; \oplus, \otimes; \lhd \rangle$ と同型である．この同型写像を $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{N}$ とする．
>
> デコードを構成する前に，$\otimes$ について次のことに注意しておく．
>
> > $m \otimes n$ は $f(k) = n$ を満たす $k \in \mathfrak{M}$ について，$\overbrace{m \oplus m \oplus \cdots \oplus m}^{k}$ を意味する．すなわち，直接 $\underbrace{\overbrace{m \oplus m \oplus \cdots \oplus m}}_{n}$ を意味しない．
>
> よって，元の $\otimes$ を使わずに，$\oplus$ から新しい演算 $\otimes' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を以下のように定め，$\oplus, \otimes'$ から，すなわち実質的に $\oplus$ のみでデコードを行う．

[1] [3, 補題 5.4.8]などを参考.

$$m \otimes' 0 = n_0$$
$$m \otimes' (n+1) = (m \otimes' n) \oplus m$$

$\oplus$ が再帰的なので $\otimes'$ も 再帰的である．

自然数の集合 $\tilde{C}$ を以下のように定めると，これは明らかに再帰的可算である．

$$\tilde{C} := \{n \in \omega \mid \mathfrak{N} \vDash \exists t.[t \otimes' n = f(e)]\}$$

任意の $t \in \mathfrak{M}, n \in \omega$ について， この $\otimes'$ は任意の $k, l \in \mathfrak{M}, n \in \omega$ に対し以下を満たすことに注意する．

$$\mathfrak{M} \vDash k \cdot n = l \Longleftrightarrow \mathfrak{N} \vDash f(k) \otimes' n = f(l)$$

$l = e$ に固定すれば，

$$\mathfrak{M} \vDash t \cdot n = e \Longleftrightarrow \mathfrak{N} \vDash f(t) \otimes' n = f(e)$$

$\tilde{C}$ の定義を考えれば，

$$\mathfrak{M} \vDash n|e \Longleftrightarrow n \in \tilde{C}$$

更に n として m 番目の素数 $p(m)$ を取れば，e の定義より，$\mathfrak{M} \vDash p(m)|e \Longleftrightarrow p(m) \in \tilde{C} \Longleftrightarrow m \in C$. したがって，$C$ は再帰的可算である．

同様の議論で，$\bar{C}$ も再帰的可算である．

したがって，$C, \bar{C}$ が再帰的可算であるので C は再帰的であり，これは再帰的分離不能としたことと矛盾する． よって $\mathfrak{M}$ は再帰的ではない． ❑

証明を踏まえると，より強めて，次のことが言える．

命題 3.5: 和のみが再帰的な **PA** の超準モデルは存在しない．

適当にエンコーディングを変更すれば，次のことも言える．

命題 3.6: 積のみが再帰的な **PA** の超準モデルは存在しない．

注意 3.7: 注意 2.12 でも述べたように，Overspill は Δ_0-論理式については **PA** より弱く $\mathbf{I\Delta_0}$ でも成り立つ．したがって，この証明は $\mathbf{I\Delta_0}$ が再帰的な超準モデルを持たないことの証明にもそのまま使える．

注意 3.8: 一方，**IOpen** は再帰的な超準モデルを持つ． より詳細に言えば，ある代数的構造が **IOpen** のモデルになる再帰的な条件が知られていて，これは Shepherdson の定理として知られている [3, p.265]． 大雑把に考えれば，どのように頑張っても **IOpen** では超越的な方法を超えず計算可能な方法でしか事実を証明出来ないということを意味し，その意味で **IOpen** は非常に弱く，例えば **IOpen** では「素数は無限に存在する」などの素数に関する性質はほとんど証明できない．

注意 3.9: 定理 3.4 の証明の中核は，再帰的可算だが再帰的分離不能な集合の存在である． このような集合から直接に第一不完全性定理を導くことが出来る [3, pp.234-235]．このような観点から，Tennenbaum の定理とは第 1 不完全性定理のモデル的な書き直しであるとも言える．

例えばある命題が $\mathbf{PA}$ や $\mathbf{I\Delta_0}$ から証明可能でないことを示すには，その命題を成り立たせないモデルの存在を示せばよい． しかし $\mathbf{PA}$ や $\mathbf{I\Delta_0}$ の超準モデルは再帰的にはなりえないので，そのようなモデルを構成することは非常に難しい．

4. モデル論的な第 2 不完全性定理の証明

記法 4.1: この章では $\mathbf{PA}$ は無矛盾であるとする．

定義 4.2: 理論 T とする．論理式 $\varphi(x)$ に対し，次の論理式を $\land$ で結んだ $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$-論理式を $\mathrm{Mod}_T(\varphi)$ とする．

$$\forall x.[\mathrm{Pr}_T(x) \to \varphi(x)]$$
$$\forall x, y.\Big[\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}^+}(x) \to [\varphi(\dot{\neg} x) \leftrightarrow \neg\varphi(x)]\Big]$$
$$\forall x.y.\Big[\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}^+}(x) \land \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}^+}(y) \to [\varphi(x \mathbin{\dot\land} y) \leftrightarrow [\varphi(x) \land \varphi(y)]]\Big]$$
$$\forall x.y.\Big[\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}^+}(x) \land \mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}^+}(y) \to [\varphi(x \mathbin{\dot\lor} y) \leftrightarrow [\varphi(x) \lor \varphi(y)]]\Big]$$
$$\forall x.\Big[\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}^+}(x) \to \Big[\varphi\Big(\dot\exists(x, y)\Big) \leftrightarrow \exists z.[\mathrm{Const}(z) \land \varphi([y \mapsto z]x)]\Big]\Big]$$
$$\forall x.\Big[\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}^+}(x) \to \Big[\varphi\Big(\dot\forall(x, y)\Big) \leftrightarrow \forall z.[\mathrm{Const}(z) \to \varphi([y \mapsto z]x)]\Big]\Big]$$

ただし，$\dot\neg x, x \mathbin{\dot\land} y, x \mathbin{\dot\lor} y, \dot\exists(x,y), \dot\forall(x,y), [y \mapsto z]x$ は Gödel 数を計算する関数であり，以下を満たす．
- $\dot\neg\ulcorner\varphi\urcorner = \ulcorner\neg\varphi\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner \mathbin{\dot\land} \ulcorner\psi\urcorner = \ulcorner\varphi \land \psi\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner \mathbin{\dot\lor} \ulcorner\psi\urcorner = \ulcorner\varphi \lor \psi\urcorner$
- $\dot\exists(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner v\urcorner)) = \ulcorner\exists v.\varphi(v)\urcorner, \dot\forall(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner v\urcorner)) = \ulcorner\forall v.\varphi(v)\urcorner$
- $[\ulcorner u\urcorner \mapsto \ulcorner v\urcorner]\ulcorner\varphi\urcorner = \ulcorner\varphi[u \mapsto v]\urcorner$

また，以下は Δ_1-論理式である．
- $\mathrm{Fml}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}+C}(x)$ は「x は $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}^+$-論理式の Gödel 数」
- $\mathrm{Const}(x)$ は「x は C の元，すなわち Henkin 定数の Gödel 数」

このとき，文 $\mathrm{Mod}_T(\varphi)$ は「$\varphi(x)$ は T のモデルで正しい論理式の Gödel 数を表現する」あるいはより簡潔に「T はモデルを持つ」という命題を表す．

定理 4.3 (完全性定理): 無矛盾な理論はモデルを持つ．

この事実は算術上で形式化出来る．

補題 4.4: 「x は T の Henkin 拡大理論の元の Gödel 数である」を意味する $\mathrm{Th}_T^{\mathrm{H}}(x)$ が構成できる．

補題 4.5 (算術化された完全性定理):「無矛盾な T の Henkin 拡大はモデルを持つ」という事実は $\mathbf{PA}$ 上で形式化出来る．すなわち，次が成り立つ．

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_T \to \mathrm{Mod}_T\big(\mathrm{Th}_T^{\mathrm{H}}\big)$$

定義 4.6: $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ を $\mathbf{PA}$ のモデルで $\mathfrak{M} \subseteq_{\mathrm{e}} \mathfrak{M}'$ とする．以下を満たすとき，$\mathfrak{M}'$ は $\mathfrak{M}$ 上で定義可能な T-モデルであるといい，$\mathfrak{M} \subseteq_T^{\mathrm{def}} \mathfrak{M}'$ と書く．
1. 任意の $\mathscr{L}_{\mathrm{A}}$-文 σ に対して $\mathfrak{M} \vDash \mathrm{Th}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \Longleftrightarrow \mathfrak{M}' \vDash \sigma$ となる $\mathscr{L}_{\mathrm{A}}$-論理式 $\mathrm{Th}_T(x)$ が存在する．
2. 任意の $\mathscr{L}_{\mathrm{A}}$-文 σ に対して $\mathfrak{M} \vDash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \Longrightarrow \mathfrak{M}' \vDash \sigma$.

補題 4.7: $\subseteq_T^{\mathrm{def}}$ は非反射的で推移的である．

証明:

非反射性を見る．仮にある $\mathfrak{M}$ で $\mathfrak{M} \subseteq_T^{\mathrm{def}} \mathfrak{M}$ としよう．

このとき，$\mathrm{Th}_T(x)$ が存在して任意の σ で $\mathfrak{M} \vDash \mathrm{Th}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \sigma$ が成り立つ．他方，$\neg\mathrm{Th}_T(x)$ を対角化すると，$\mathbf{PA} \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\mathrm{Th}_T(\ulcorner\sigma\urcorner)$ となる不動点 σ が存在する．この不動点について $\mathfrak{M} \vDash \mathrm{Th}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \neg\mathrm{Th}_T(\ulcorner\sigma\urcorner)$ が成り立つのでおかしい．

推移性を見る．$\mathfrak{M}_1 \subseteq_T^{\mathrm{def}} \mathfrak{M}_2$ かつ $\mathfrak{M}_2 \subseteq_T^{\mathrm{def}} \mathfrak{M}_3$ とする．

いま，$\mathfrak{M}_1 \subseteq_T^{\mathrm{def}} \mathfrak{M}_2$ から $\mathrm{Th}_T(x)$ があり，任意の σ で $\mathfrak{M}_1 \vDash \mathrm{Th}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \Longleftrightarrow \mathfrak{M}_2 \vDash \sigma$.

同様に，$\mathfrak{M}_2 \subseteq_T^{\mathrm{def}} \mathfrak{M}_3$ から $\mathrm{Th}'_T(x)$ があり，任意の σ で $\mathfrak{M}_2 \vDash \mathrm{Th}'_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \Longleftrightarrow \mathfrak{M}_3 \vDash \sigma$.

$\mathrm{Th}''_T(x) \equiv \mathrm{Th}_T(\ulcorner\mathrm{Th}'_T(x)\urcorner)$ とすると，任意の σ で以下が成り立つ．

$$\mathfrak{M}_1 \vDash \mathrm{Th}''_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \Longleftrightarrow \mathfrak{M}_2 \vDash \mathrm{Th}'_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \Longleftrightarrow \mathfrak{M}_3 \vDash \sigma$$

また，$\mathrm{Pr}_T(x)$ は Σ_1-論理式であり，$\mathfrak{M}_1 \subseteq_{\mathrm{e}} \mathfrak{M}_2$ なので 補題 2.7 より 任意の σ で $\mathfrak{M}_1 \vDash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \Longleftrightarrow \mathfrak{M}_2 \vDash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\sigma\urcorner)$ が成り立つ．$\mathfrak{M}_2 \subseteq_T^{\mathrm{def}} \mathfrak{M}_3$ から $\mathfrak{M}_2 \vDash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \Longrightarrow \mathfrak{M}_3 \vDash \sigma$ なので，結局 $\mathfrak{M}_1 \vDash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \Longrightarrow \mathfrak{M}_3 \vDash \sigma$ が言える．

以上より，$\mathfrak{M}_1 \subseteq_T^{\mathrm{def}} \mathfrak{M}_3$ が成り立つ．

❑

注意 4.8: 様相論理 **GL** を定義する有限 Kripke フレームのクラスは非反射的かつ推移的である．

定義 4.9 (Gödel 文): $\neg\mathrm{Pr}_T(x)$ を対角化して得られる文 G_T を T の Gödel 文という．つまり，G_T は以下を満たす．

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{G}_T \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{G}_T\urcorner)$$

補題 4.10: $\mathbf{PA} + \mathrm{Con}_T$ の任意のモデル $\mathfrak{M}$ に対し，$\mathfrak{M} \subseteq^{\mathrm{def}}_T \mathfrak{M}'$ となる T のモデル $\mathfrak{M}'$ が存在する．

定義 4.11: $\mathbf{PA}$ のモデル $\mathfrak{M}$ について，$\mathfrak{M} \vDash \mathrm{G}_{\mathbf{PA}}$ なら $\mathfrak{M}$ は正，そうでないときは $\mathfrak{M}$ は負という．

定理 4.12: $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ を成立させない $\mathbf{PA}$ のモデルが存在する．

証明: 任意の $\mathbf{PA}$ のモデルで $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ が成立すると仮定する．

まず，$\mathbf{PA}$ が無矛盾なので $\mathbf{PA}$ のモデル $\mathfrak{M}_1$ が存在する．$\mathfrak{M}_1$ から負の $\mathbf{PA}$ のモデル $\mathfrak{M}_2$ を構成する．

> $\mathfrak{M}_1$ が負なら，$\mathfrak{M}_2$ は $\mathfrak{M}_1$ とすればよい．
>
> $\mathfrak{M}_1$ が正のとき, Gödel 文の定義より $\mathfrak{M}_1 \vDash \neg\mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \mathrm{G}_{\mathbf{PA}} \urcorner)$ であり，したがって, $\mathfrak{M}_1 \vDash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}+\neg\mathrm{G}_{\mathbf{PA}}}$. 補題 4.10 から，$\mathbf{PA} + \neg\mathrm{G}_{\mathbf{PA}}$ のモデル $\mathfrak{M}_2$ が存在して，$\mathfrak{M}_1 \subseteq^{\mathrm{def}}_{\mathbf{PA}+\neg\mathrm{G}_{\mathbf{PA}}} \mathfrak{M}_2$．明らかに，$\mathfrak{M}_2$ は負である．

仮定より, $\mathfrak{M}_2$ は $\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ が成立する．したがって 補題 4.10 より $\mathbf{PA}$ のモデル $\mathfrak{M}_3$ が存在して $\mathfrak{M}_2 \subseteq^{\mathrm{def}}_{\mathbf{PA}} \mathfrak{M}_3$．今 $\mathfrak{M}_2$ が負なので $\mathfrak{M}_2 \vDash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \mathrm{G}_{\mathbf{PA}} \urcorner)$ であるから，$\mathfrak{M}_3 \vDash \mathrm{G}_{\mathbf{PA}}$．よって，$\mathfrak{M}_3$ は正である．

$\mathfrak{M}_3$ が正なので，$\mathfrak{M}_2$ を作ったときと同様に $\mathfrak{M}_3$ から負の $\mathbf{PA}$ のモデル $\mathfrak{M}_4$ を構成できて，$\mathfrak{M}_3 \subseteq^{\mathrm{def}}_{\mathbf{PA}} \mathfrak{M}_4$ が成り立つ．

$\subseteq^{\mathrm{def}}_{\mathbf{PA}}$ の推移性より，$\mathfrak{M}_2 \subseteq^{\mathrm{def}}_{\mathbf{PA}} \mathfrak{M}_4$ であり，よって $\mathfrak{M}_2 \vDash \mathrm{Pr}_{\mathbf{PA}}(\ulcorner \mathrm{G}_{\mathbf{PA}} \urcorner)$ から $\mathfrak{M}_4 \vDash \mathrm{G}_{\mathbf{PA}}$ が導かれる．しかし $\mathfrak{M}_4$ は負であるから，これはおかしい． ❑

系 4.13 (第 2 不完全性定理): $\mathbf{PA} \nvDash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$.

証明: 定理 4.12 と完全性定理より $\mathbf{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ は無矛盾である．仮に $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ とすると $\mathbf{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathbf{PA}}$ から $\bot$ が導出できて無矛盾性に反する． ❑

参考文献

[1] 田中一之, 鹿島亮, 角田法, と 菊池誠, 数学基礎論講義 不完全性定理とその発展. 日本評論社, 1997.

[2] 菊池誠,「Part D. 算術の超準モデル」, 数学基礎論講義 不完全性定理とその発展, 日本評論社, 1997.

[3] 菊池誠, 不完全性定理. 共立出版, 2014.

[4] 田中一之, 数学基礎論序説 数の体系への論理的アプローチ. 裳華房, 2019.