Yablo のパラドックスについて

2025.1.26

SnO2WMaN

メタ情報

- この文書のリポジトリは https://github.com/SnO2WMaN/notes-on-yablo-paradox です．誤植や訂正などは Issues から連絡してください．
-

目次

メタ情報 1
1. はじめに 1
2. Yablo のパラドックス 1
3. Yablo のパラドックスの形式化 2
参考文献 5

1. はじめに

文 G が「G は正しくない」という主張だとする．この主張は決定不能，つまり正しいか正しくないかを決めることは出来ない． これは嘘つきのパラドックスとして知られているが，G は G 自身の真偽について述べているので自己言及をしていると考えられる．

では，自己言及をしなければこうした事態は発生しないのか？ Yablo のパラドックスは，自己言及をしない（ように見える）文であっても，真偽が決定不能となる一例を示すものである．

ところで，Gödel の不完全性定理の根幹となるアイデアは，非常に荒く言えば，真偽という概念を理論上の証明可能性として捉え直して嘘つきのパラドックスを形式化することである．このアイデアを Yablo のパラドックスに適用することで，Yablo のパラドックスを形式化し，不完全性定理を導くことが出来る．

2. Yablo のパラドックス

Yablo のパラドックス [1] を説明する． このパラドックスは，一見して自己言及をしない命題であっても，その命題の真偽は決定不能となる一例を示すものである．

> **注意 2.1**: ここでは，真偽という概念を大雑把に用いる．

> **定義 2.2**: 無限個の文 $Y_0, Y_1, \ldots$ を考える．
> ただし，$i \in \omega$ とし，各 Y_i は「任意の $i < j$ について Y_j は正しくない」という主張である．

> **注意 2.3**: Y_i は Y_i 自身の真偽については何も触れず，あくまで自分以降の文 $Y_{i+1}, Y_{i+2}, \ldots$ の真偽について述べているだけなので，自己言及はしていないと考えられている． この考え方の是非は後の章で検討することにする．

> **定理 2.4**: このとき，任意の $i \in \omega$ に対して Y_i の真偽は決定できない．

証明: もし，ある文 Y_i が正しいとする． すると，この文以降の文 $Y_{i+1}, Y_{i+2}, \dots$ はすべて正しくない．特に Y_{i+1} が正しくないとすると，Y_{i+1} 以降の文 $Y_{i+2}, Y_{i+3}, \dots$ の少なくともどれかは正しくなければならない． よって $Y_{i+2}, Y_{i+3}, \dots$ のどれかに，正しく，かつ，正しくない文が存在して，これは明らかにおかしい．

よって，任意の Y_i は正しくないと考える． しかしこの場合でも，上記の議論より $Y_{i+1}, \dots$ のどこかには正しい文が存在することになり，これもおかしい． ❑

3. Yablo のパラドックスの形式化

節 2 の「正しくない」という概念を，証明可能性によって捉えることで，Yablo のパラドックスを形式化する． この章は主に[2], [3] を参考にした．

記法 3.1:
- 論理式として算術の論理式を考えていることにする．
- T は $\mathbf{PA}$ の適当な無矛盾な拡大とする．
- $\mathrm{Pr}_T(x)$ は導出可能性条件をすべて満たす標準的な証明可能性述語であるとする．

定理 3.2 (一般化された不動点定理 [4, pp.53]): 任意の自由変数が x, y のみの論理式 $\varphi(x, y)$ に対して，次のような自由変数が x だけの論理式 $\psi(x)$ が存在し，その算術的階層は等しい．

$$\mathbf{PA} \vdash \forall x.[\psi(x) \leftrightarrow \varphi(x, \ulcorner \psi \urcorner)]$$

$\psi(x)$ を $\varphi(x, y)$ の不動点という．

定義 3.3 (Yablo 文): まず $\varphi(x, y)$ を次のように定義する．

$$\varphi(x, y) :\equiv \forall z.[x < z \to \neg \mathrm{Pr}_T(\mathrm{apply}(y, z))]$$

ただし，$\mathrm{apply}(y, z)$ は，$\psi(v)$ を自由変数が v だけの論理式，$n \in \omega$ として，$\mathrm{apply}(\ulcorner \psi(v) \urcorner, \overline{n}) = \ulcorner \psi(\overline{n}) \urcorner$ を満たす関数とする．

定理 3.2 によって得られる $\varphi(x, y)$ の不動点 $\mathrm{Y}_T(x)$ について， $n \in \omega$ に対して $\mathrm{Y}_T(\overline{n})$ を T の n 番目の Yablo 文とする．

記法 3.4: 表記の煩雑さを避けるため, 以降では自然数 $n \in \omega$ とその数項 $\overline{n}$ とを区別しない．つまり, $\mathrm{Y}_T(\overline{n})$ を $\mathrm{Y}_T(n)$ と書いたりすることにする．

注意 3.5: T の Yablo 文の算術的階層は $\mathrm{Pr}_T(x)$ と同じである．普通，$\mathrm{Pr}_T(x)$ は Σ_1 として取れるので，Yablo 文も Σ_1 とする．

注意 3.6: 展開すれば，$\mathrm{Y}_T(n)$ は以下を満たす．

$$\mathbf{PA} \vdash \forall x.[\mathrm{Y}_T(x) \leftrightarrow \forall z.[x < z \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Y}_T(z) \urcorner)]] \tag{1}$$

> つまり，任意の n について，n 番目の Yablo 文 $\mathrm{Y}_T(n)$ は「n 番目以降の全ての Yablo 文 $\mathrm{Y}_T(n+1), \mathrm{Y}_T(n+2), \dots$ は T 上で証明できない」ことを表しており， これは 節 2 で述べた Yablo の文を T 上の証明可能性によって形式化したものとして考えることが出来る．

さて，このように定義した Yablo 文から，第 1 不完全性定理を出すことが出来る．証明は，定理 2.4 での証明の議論と同じような議論で行われる．

補題 3.7: T が無矛盾なら，任意の $n \in \omega$ について $T \nvdash \mathrm{Y}_T(n)$.

証明: ある $n \in \omega$ で $T \vdash \mathrm{Y}_T(n)$ と仮定する．

式 1 から，

$$T \vdash \forall z.[n < z \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Y}_T(z) \urcorner)] \tag{2}$$

式 2 で，$z = n+1$ として取れば，

$$T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Y}_T(n+1) \urcorner) \tag{3}$$

また 式 2 から算術的な計算によって $T \vdash \forall z.[n+1 < z \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Y}_T(z) \urcorner)]$ も言えて， これは 式 1 から $T \vdash \mathrm{Y}_T(n+1)$ が言える．導出可能性条件 **D1** より，

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Y}_T(n+1) \urcorner) \tag{4}$$

式 2 と 式 3 から $T \vdash \bot$ が出せる．しかし T は無矛盾なのでこれはおかしい． ❑

補題 3.8: T が Σ_1-健全なら，任意の $n \in \omega$ について $T \nvdash \neg \mathrm{Y}_T(n)$.

証明: ある $n \in \omega$ で $T \vdash \neg \mathrm{Y}_T(n)$ と仮定する．

すると，式 1 から $T \vdash \exists z.[n < z \land \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Y}_T(z) \urcorner)]$ が言える． T の Σ_1-健全性から $\mathfrak{N}$ を経由して，適当な $m \in \omega$ が取れて $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Y}_T(m) \urcorner)$.

再び Σ_1-健全性から $T \vdash \mathrm{Y}_T(m)$ が言える．しかし 補題 3.7 からこれはおかしい． ❑

補題 3.7 と 補題 3.8 より，直ちに定理 3.9 が成り立つ．

定理 3.9 (Gödel の第 1 不完全性定理): T が Σ_1-健全なら，T の任意の Yablo 文 $\mathrm{Y}_T(n)$ は決定不能であり，したがって T は不完全である．

では，第 2 不完全性定理についてはどうなるのか？ これに関しては，定理 3.12 が成り立ち．これと定理 3.9 から直ちに従う．

定義 3.10: T の無矛盾性を表す文 $\mathrm{Con}_T :\equiv \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \bot \urcorner)$ とする．

補題 3.11 ([5, 補題 4.2.4]): U を $\mathbf{PA}$ の適当な拡大理論としたとき，任意の文 σ に対して，次は同値.
1. $U \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\sigma\urcorner)$
2. $U \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\sigma\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\neg\sigma\urcorner)$

任意の Yablo 文は，T の形式的無矛盾性と同値である.

定理 3.12: $T \vdash \forall x.[\mathrm{Y}_T(x) \leftrightarrow \mathrm{Con}_T]$

証明: 全称化より，適当な $n \in \omega$ に対して $T \vdash \mathrm{Y}_T(n) \leftrightarrow \mathrm{Con}_T$ を示せば十分.

$T \vdash \mathrm{Y}_T(n) \to \mathrm{Con}_T$ を示す.

$$
\begin{array}{lll}
T \vdash \bot \to \mathrm{Y}_T(n+1) & \text{爆発律} & \\
\quad \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\bot\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n+1)\urcorner) & \mathbf{D1}, \mathbf{D2} & \\
\quad \vdash \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n+1)\urcorner) \to \mathrm{Con}_T & & (5.\mathrm{i}) \\
T \vdash \mathrm{Y}_T(n) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n+1)\urcorner) & \text{式 1 より} & (5.\mathrm{ii}) \\
T \vdash \mathrm{Y}_T(n) \to \mathrm{Con}_T & \text{式 5.i, 式 5.ii より} &
\end{array}
$$

$T \vdash \mathrm{Con}_T \to \mathrm{Y}_T(n)$ を示す.

$$
\begin{array}{lll}
T \vdash \mathrm{Y}_T(n) \to \mathrm{Y}_T(n+1) & & \\
\quad \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n)\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n+1)\urcorner) & \mathbf{D1}, \mathbf{D2} & (6.\mathrm{i}) \\
T \vdash \mathrm{Y}_T(n) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n+1)\urcorner) & \text{式 1 より} & \\
\quad \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n+1)\urcorner) \to \neg\mathrm{Y}_T(n) & & (6.\mathrm{ii}) \\
T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n)\urcorner) \to \neg\mathrm{Y}_T(n) & \text{式 6.i と式 6.ii より} & \\
\quad \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n)\urcorner)\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\neg\mathrm{Y}_T(n)\urcorner) & \mathbf{D1}, \mathbf{D2} & (6.\mathrm{iii}) \\
T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n)\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n)\urcorner)\urcorner) & \mathbf{D3} & (6.\mathrm{iv}) \\
T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n)\urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\neg\mathrm{Y}_T(n)\urcorner) & \text{式 6.iii, 式 6.iv より} & \\
\quad \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(n)\urcorner) & \text{補題 3.11 より} & \\
\quad \vdash \forall x.[\mathrm{Con}_T \to \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(x)\urcorner)] & \text{全称化} & \\
\quad \vdash \mathrm{Con}_T \to \forall x.[\neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\mathrm{Y}_T(x)\urcorner)] & & \\
\quad \vdash \mathrm{Con}_T \to \mathrm{Y}_T(n) & \text{式 1 より} &
\end{array}
$$

❑

定理 3.13 (Gödel の第 2 不完全性定理): T が無矛盾なら $T \nvdash \mathrm{Con}_T$. また, T が Σ_1-健全なら $T \nvdash \neg\mathrm{Con}_T$.

また，定理 3.12 から，次の系 3.14 が従う.

系 3.14: $T \vdash \forall x, y.[\mathrm{Y}_T(x) \leftrightarrow \mathrm{Y}_T(y)]$.

注意 3.15: 元々の Yablo のパラドックスとの類推を考えると，Y_0 とは「$Y_1, Y_2, ...$ は正しくない」と述べているはずの命題であるので，$T + \mathrm{Y}_T(0) \nvdash \mathrm{Y}_T(1)$ であってほしい． しかし，系 3.14 を更に変形することで $T + \mathrm{Y}_T(0) \vdash \mathrm{Y}_T(1)$ が言えるため，これは成り立たない．

最後に Gödel 文について書いておく． Gödel 文と Con_T は T 上で同値であるという事実が成り立つ． この事実から，任意の Yablo 文と Gödel 文との同値性(系 3.18)も得られる．

定義 3.16: T の Gödel 文 G_T は $\mathrm{Pr}_T(x)$ の不動点とする．

命題 3.17 ([5, 命題 4.2.6]): $T \vdash \mathrm{G}_T \leftrightarrow \mathrm{Con}_T$.

系 3.18: $T \vdash \forall x.[\mathrm{G}_T \leftrightarrow \mathrm{Y}_T(x)]$.

通常の通り，G_T によって第 1 不完全性定理と第 2 不完全性定理が成り立つため，系 3.18 から 定理 3.9 と 定理 3.13 が直ちに従う． その意味では定理 3.12 以外の定理はそれほどおもしろい結果でもないかもしれない．

参考文献

[1] S. Yablo, “Paradox without Self-Reference,” Analysis, vol. 53, no. 4, pp. 251–252, Oct. 1993, doi: 10.1093/analys/53.4.251.

[2] C. Cieśliński and R. Urbaniak, “Gödelizing the Yablo Sequence,” Journal of Philosophical Logic, vol. 42, no. 5, pp. 679–695, Oct. 2013, doi: 10.1007/s10992-012-9244-4.

[3] M. Kikuchi and T. Kurahashi, “Three Short Stories around Gödel's Incompleteness Theorems,” Journal of the Japan Association for Philosophy of Science, vol. 38, no. 2, pp. 75–80, 2011, doi: 10.4288/kisoron.38.2_75.

[4] G. Boolos, The Logic of Provability. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. doi: 10.1017/CBO9780511625183.

[5] 倉橋太志, “第 2 部. 証明可能性論理,” in 数学における証明と真理 : 様相論理と数学基礎論, 共立出版, 2016.