算術的完全性定理

Mateusz Zunderewski

2024 年 9 月 20 日

概要

この文書では主に **GL** の Solovay の算術的完全性定理について述べる.

目次

[新井 21; 菊池+16] などを大いに参考にした．

1　準備

定義と，基本的な事実を確認する．

表記 1.1. 自然数全体の集合は ω で表す．

1.1　不完全性定理

表記 1.2. 一般の算術の文については $\sigma, \pi, \ldots$ のようにギリシャ文字で表すことにする．

定義 1.3. $n \leq 1$ に対し，$\mathrm{Pr}_T^n(\ulcorner \sigma \urcorner) \equiv \underbrace{\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \cdots \mathrm{Pr}_T(\ulcorner}_{n} \sigma \urcorner) \cdots \urcorner)$ と定義する．

1.2　様相論理

表記 1.4. 一般の様相論理式は $A, B, C, \ldots$ のように普通のラテンアルファベットを用いて表すことにする．

定義 1.5. $n \in \omega$ とする．$\Box^n A$ を再帰的に以下のように定める．

- $\Box^0 A \equiv A$
- $\Box^{n+1} A \equiv \Box\Box^n A$

定義 1.6. $F = \langle W, R \rangle$ を Kripke モデル，$x \in W$ とする．「x から最大で何回遷移可能か」を表す順序数 $d(x)$ を以下のように定める．

- $d(x) = \max\{n \in \omega \mid \exists y \in W \colon wR^n y\}$
- ただし $\{n \in \omega \mid \exists y \in W \colon wR^n y\} = \omega$ のとき，$d(x) = \omega$ とする．

注意 1.7. 定義より明らかだが，$d(x)$ が一般に自然数を取るとは限らない．例えば W が無限であれば任意の $n \in \omega$ に対して $xR^n y$ となる y を取ってこれるかもしれないし，仮に W が有限だとしても R が反射的ならば $xRxRx \cdots$ のようなループによって任意の $n \in \omega$ で $xR^n x$ かもしれない．

ただし，特殊な構造を持つフレームに対しては $d(x)$ は各 x で常に自然数となることが保証できる．

何回遷移できるかが有限で抑えられるなら，次の補題 1.8 が成り立つ．

補題 1.8. $d(x), n \in \omega$ とする．$d(x) \leq n$ ならば $M, x \vDash \Box^{n+1} A$.

証明. 厳密な証明は n についての帰納法を用いて示せばよいが，直感的には $d(x) \leq n$ ということは $xR^{n+1} y$ となる y が存在しないということを考えれば明らか．

$\Box$

1.2.1　GL について

定義 1.9. 公理図式 $\mathsf{L} \equiv \Box(\Box A \to A) \to \Box A$ とする．$\mathbf{K} \oplus \mathsf{L}$ を $\mathbf{GL}$ と定義する．

定義 1.10. 有限 **GL** 木モデル $M = \langle W = \{w_1, \ldots, w_n\}, w_1, R, \Vdash \rangle$ に対して，根から下に新しく w_0 を生やして拡張した有限木 **GL** モデル $\langle W' = \{w_0, w_1, \ldots, w_n\}, w_0, R', \Vdash' \rangle$ を M の単純拡張モデルと呼ぶ．

よりきちんと定義すると以下のとおりで，これは有限木 **GL** モデルとなる．

- $W' = W \cup \{w_0\}$
- $R' = R \cup \{(w_0, w_i) \mid w_i \in W\}$
- $w \in W$ について $w \Vdash' p \iff w \Vdash p$
- $w_0 \Vdash' p \iff w_1 \Vdash p$

補題 1.11. M' は M の単純拡張とする．$w_i \in W$ ならば $M, w_i \nvDash B \implies M', w_i \nvDash B$

証明. 新しく追加された w_0 以外は元のモデルと同じであり，$w_i \in W \iff w_i \neq w_0$ であるから，ほとんど明らか．

$\square$

1.2.2 Grz について

定義 1.12. 公理図式 $\mathsf{Grz} \equiv \Box(\Box(A \to \Box A) \to A) \to A$ とする．$\mathbf{K} \oplus \mathsf{Grz}$ を **Grz** と定義する．

補題 1.13. $\mathbf{Grz} \vdash \mathsf{T}$ および，$\mathbf{Grz} \vdash \mathsf{4}$.

よって直ちに次が成り立つ．

系 1.14. $\mathbf{S4} \leq \mathbf{Grz}$．また $\mathbf{S4Grz} = \mathbf{S4} \oplus \mathsf{Grz}$ として $\mathbf{S4Grz} = \mathbf{Grz}$.

注意 1.15. **S4** およびその拡張に対して Grz という公理を追加した論理は，**??**節で考える Modal Companion という概念で重要となる．

補題 1.16. $F \vDash \mathsf{Grz}$ ならば $F \vDash \mathsf{T}$ かつ $F \vDash \mathsf{4}$ である．

したがって T と 4 のフレーム定義性より，直ちに次の系が得られる．

系 1.17. $F \vDash \mathsf{Grz}$ ならば F は反射的かつ推移的.

定義 1.18. $\mathbf{\Lambda}$ は様相論理とし，$\mathbb{F}$ は空でないフレームクラスとする．

1. 任意の F で $F \in \mathbb{F} \implies F \in \mathbb{F}_{\mathbf{\Lambda}}$ のとき，$\mathbb{F}_{\mathbf{\Lambda}}$ は $\mathbb{F}$ によって特徴づけられるという．
2. 任意の F で $F \in \mathbb{F} \iff F \in \mathbb{F}_{\mathbf{\Lambda}}$ のとき，$\mathbb{F}_{\mathbf{\Lambda}}$ は $\mathbb{F}$ によって定義されるという．

系 1.19. $\mathbb{F}_{\mathbf{Grz}}$ は反射的，推移的，弱逆整礎的なフレームのクラスによって定義される．

補題 1.20. W 上の 2 項関係 R について，W が有限かつ R が推移的かつ反対称的ならば W は弱逆整礎的である．

系 1.19 と補題 1.20 より，**GL** のときと同様に使いやすい次の系が得られる．

系 1.21. $\mathbb{F}^{\mathrm{Fin}}_{\mathbf{Grz}}$ は反射的，推移的，反対称的な有限フレームクラスによって定義される．

1.2.3 Grz の Kripke 完全性

基本的には **GL** の Kripke 完全性証明と同じように行い，コンプリートモデルの構成も同様に行う．

定義 1.22. 有限集合 $\mathrm{Sub}^G(A) := \mathrm{Sub}(A) \cup \{\Box(\Box \to \Box A) \mid A \in \mathrm{Sub}(A)\}$ と定義する．

定義 1.23. X, S は有限集合とする．任意の $A \in S$ に対して $A \in X$ または $-A \in X$ であるとき，X が S に対して補で閉じているという．

X が S に対して補で閉じて $\mathbf{\Lambda}$ 無矛盾な論理式の有限集合であるとき，簡潔に CCF と呼ぶことにする．

補題 1.24. S に対しての CCF はたかだか有限個しか存在しない．

GL と同じように，CCF によって有限コンプリートモデルを構成する．

定義 1.25. A に対しての **Grz** 有限コンプリートフレーム $F_{\mathbf{Grz},A} := \langle W_{\mathbf{Grz},A}, R_{\mathbf{Grz},A}\rangle$ を以下のように定義する．

補題 1.26. $F_{\mathbf{Grz},A}$ は反射的，推移的，反対称的．

定義 1.27. $M_{\mathbf{Grz},A} := \langle F_{\mathbf{Grz},A}, \Vdash_{\mathbf{Grz},A}\rangle$ を A に対しての **Grz** 有限コンプリートモデルという．ただし，$w \Vdash_{\mathbf{Grz},A} p \iff p \in W$ とする．

やはり **GL** と同様に真理補題が成り立つ．その前にいくつかの補題を示す．

補題 1.28. $B \in \mathrm{Sub}(A)$ とする．$M_{\mathbf{Grz},A}, X \vDash B \iff B \in X$．

ここまでくれば，あとは **GL** と同じように完全性を示すことが出来る．

定理 1.29. **Grz** は反射的，推移的，反対称的な有限フレームクラスに対して Kripke 完全.

よって直ちに次のこともわかる．

系 1.30. **Grz** は有限フレーム性を持ち，したがって決定可能.

1.2.4 Boxdot Companion

定義 1.31. $\boxdot A \equiv A \land \Box A$ とする．

定義 1.32 (Boxdot 変換)**.** $A^{\boxdot}$ は A の中に現れる $\Box$ を全て $\boxdot$ で置き換えた論理式とし，その変換 $\cdot^{\boxdot}$ を Boxdot 変換と呼ぶ．もう少し厳密に書けば，以下のように再帰的に定義される．

定義 1.33. 様相論理 $\mathbf{\Lambda_1}$ が $\mathbf{\Lambda_2}$ の Boxdot Companion であるとは，任意の様相論理式 A に対して $\mathbf{\Lambda_1} \vdash A \iff \mathbf{\Lambda_2} \vdash A^{\boxdot}$ が成り立つことである．

本節では証明可能性論理という面でやや重要な事実である，**Grz** が **GL** の Boxdot Companion であること (定理 1.40) を示す．なお，他の論理に対するもっと一般的な結果が [Jeř16] によって示されている．

片側である補題 1.34 は Kripke 意味論を用いて示す．

補題 1.34. $\mathbf{GL} \vdash A^{\boxdot} \implies \mathbf{Grz} \vdash A$

定義 1.35. $F = \langle W, R\rangle$ は Kripke フレームとする．

1. F の反射化 $F^{=} := R \cup \{(x, x) \in x \in W\}$ とする．
2. F の非反射化 $F^{\neq} := \{(x, y) \in R \mid x \neq y\}$ とする．

補題 1.36. $F = \langle W, R\rangle$ を Kripke フレーム，$\Vdash$ を付値，$x \in W$，A は任意の様相論理式とする．
$\langle F, \Vdash\rangle, x \vDash A^{\boxdot} \iff \langle F^{=}, \Vdash\rangle, x \vDash A$

証明.A の構造に対する帰納法で示す．自明ではないのは $A \equiv \Box B$ のときだけなのでそれだけ示せば十分.

$\Box$

系 1.37. F を Kripke フレーム，A は任意の様相論理式とすれば $F \vDash A^{\boxdot} \iff F^{=} \vDash A^{\boxdot}$

補題 1.38. $F = \langle W, R\rangle$ を反射的な Kripke フレーム，$\Vdash$ を付値，$x \in W$，A は任意の様相論理式とする．$\langle F, \Vdash\rangle, x \vDash A \iff \langle (F^{\neq})^{=}, \Vdash\rangle, x \vDash A$.

もう片側である補題 1.39 も Kripke 意味論を用いた議論で示すことが出来るが，こちらには構文論的な議論のみで示す非常にパズル的な証明 [Boo94, pp163-164] が知られている．

補題 1.39. $\mathbf{Grz} \vdash A \implies \mathbf{GL} \vdash A^{\boxdot}$

こうして補題 1.34 と補題 1.39 より，直ちに **Grz** が **GL** の Boxdot Companion であることがわかる．

定理 1.40. **Grz** は **GL** の Boxdot Companion である．

1.3 算術的意味論

注意 1.41. 以下，理論といえば算術の理論を指すことにする．

定義 1.42. 様相論理の命題変数から算術の文への写像 $*\colon \mathrm{Prop}_{\mathcal{L}_{\mathrm{M}}} \to \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}}$ を算術的解釈あるいは単に解釈と呼ぶ.

定義 1.43. 解釈 f と理論 T の証明可能性述語 Pr_T に対して，以下のように定義域が様相論理式一般に拡張された写像 $*_{\mathrm{Pr}_T}\colon \mathrm{Form}_{\mathcal{L}_{\mathrm{M}}} \to \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}}$ を算術的変換あるいは単に変換と呼ぶ．ただし読みづらいため，文脈上 Pr_T が明らかな場合は解釈の記号と同様に $*$ として記号を濫用することにする．

例 1.44. 第 2 不完全性定理で用いられる無矛盾性を表す文 Con_T を $\neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\bot\urcorner)$ として定義したことを思い出せば，この文は様相論理式 $\neg\Box\bot$ を適当な変換 $*$ を用いて解釈した文として表すことが出来る．すなわち，$\mathrm{Con}_T \equiv (\neg\Box\bot)^{*_{\mathrm{Pr}_T}}$ である．

2 GL の算術的完全性定理

Solovay[Sol76] は証明可能性論理の出発点である次の定理を示した．この章ではその証明を追っていく．

定理 2.1 (**GL** の算術的完全性定理 [Sol76])**.** Pr_T は T の標準的な証明可能性とし，A は任意の様相論理式とする．任意の解釈 $*$ に対して $T \vdash A^{*_{\mathrm{Pr}_T}}$ であるなら，$\mathbf{GL} \vdash A$ である．

証明は込み入っているため，まずはその指針を確認する．

定理 2.1 の証明の指針.

1. 対偶を示す．すなわち，$\mathbf{GL} \nvdash A$ であるなら，ある解釈 $*$ が存在して $T \nvdash A^*$ であることを示す．
2. $\mathbf{GL} \nvdash A$ であるから，完全性よりある有限 **GL** 木モデル M とその根 r で $M, r \nvDash A$ である．
3. 今，M は自然数上に定義されるものとすると一般性を失わずに今後の議論が行いやすい．そのため，$M = \langle \{1, \ldots, n\}, 1, R, \Vdash \rangle$ とし，$M, 1 \nvDash A$ として考える．
4. この M に 0 を入れて単純拡張したモデル M' を算術の中に埋め込むような解釈 $*$ を構成する．これが所望の解釈となる．
5. そのような $*$ で $T \vdash A^*$ を仮定すると議論が破綻するため，$T \nvdash A^*$ であることが従う．

■

定義 2.2. $M = \langle W = \{0, 1, \ldots, n\}, 0, R, \Vdash \rangle$ に対し，以下の 4 条件を満たす $n+1$ 個の文の列 $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ を M の Solovay 文の列と呼ぶ．

1. $T \vdash \bigvee_{i \in W} \beta_i$
2. $i \neq j$ ならば $T \vdash \beta_i \to \neg \beta_j$
3. $i \neq 0$ ならば $T \vdash \beta_i \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \bigvee_{iRj} \beta_j \urcorner)$
4. iRj ならば $T \vdash \beta_i \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \beta_j \urcorner)$

注意 2.3. Solovay 文の列が構成出来るかどうかは全く自明ではないが，一旦は構成可能であるとする．このことは後で確かめる．

所望の解釈が次である．

定義 2.4. $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ を M の Solovay 文の列とする．次のように定義される解釈 $*$ を Solovay 解釈と呼ぶ．

$$p^* \equiv \bigvee_{\substack{i \in W \\ M, i \Vdash p}} \beta_i$$

Solovay 解釈の性質として重要なのが次の補題である．

補題 2.5. $*$ は Solovay 解釈とする．任意の $i \neq 0$ と様相論理式 B に対して次が成り立つ．

1. $M, i \vDash B \implies T \vdash \beta_i \to B^*$
2. $M, i \nvDash B \implies T \vdash \beta_i \to \neg B^*$

証明. B の構成についての帰納法で同時に示す．

- $B \equiv p$ とする．
  1. $i \vDash p$ のとき，$T \vdash \beta_i \to \bigvee_{j \Vdash p} \beta_j$ を示せば良いが，これは明らか．
  2. $i \nvDash p$ のとき $T \vdash \beta_i \to \neg \bigvee_{j \Vdash p} \beta_j$ を示す．これは $T \vdash \bigvee_{j \Vdash p} \beta_j \to \neg \beta_i$ を示せば良く，S2 と $j \neq i$ であることからわかる．
- $B \equiv \bot$ のときは明らか．
- $B \equiv C \to D$ のときは帰納法の仮定を用いて明らか．

- $B \equiv \Box C$ のとき．
  1. $i \vDash \Box C$ のとき，任意の iRj な j で $M, j \vDash C$ である．帰納法の仮定より $T \vdash \beta_j \to C^*$ であるので，$T \vdash \bigvee_{iRj} \beta_j \to C^*$．D1 と D2 より $T \vdash \mathrm{Pr}(\ulcorner \bigvee_{iRj} \beta_j \urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner C^* \urcorner)$．S3 より $T \vdash \beta_i \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \bigvee_{iRj} \beta_j \urcorner)$ だったから，合わせて $T \vdash \beta_i \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner C^* \urcorner)$ を得る．これは $T \vdash \beta_i \to (\Box C)^*$ である．
  2. $i \nvDash \Box C$ のとき，ある iRj な j で $M, j \vDash C$ である．帰納法の仮定より $T \vdash \beta_j \to \neg C^*$ であり，対偶を取れば $T \vdash C^* \to \neg \beta_j$ である．D1 と D2 より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner C^* \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \beta_j \urcorner)$．ここで S4 の対偶より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \beta_j \urcorner) \to \neg \beta_i$ であるから，合わせて $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner C^* \urcorner) \to \neg \beta_i$ を得る．これは $T \vdash (\Box C)^* \to \neg \beta_i$ であり，対偶を取れば $T \vdash \beta_i \to \neg (\Box C)^*$ となる．

$\Box$

これで定理 2.1 の証明の準備が整った．

定理 2.1 の証明. 対偶を示す．すなわち，$\mathbf{GL} \nvdash A$ であるなら，ある解釈 $*$ が存在して $T \nvdash A^*$ であることを示す．

$\mathbf{GL} \nvdash A$ であるから完全性より，ある有限木モデル $M = \langle W = \{1, \ldots, n\}, 1, R, \Vdash \rangle$ が存在して $M, 1 \nvDash A$ である．M に 0 を入れて単純拡張したモデル $M' = \langle W' = \{0, 1, \ldots, n\}, 0, R', \Vdash' \rangle$ とすると，補題 1.11 より $M', 1 \nvDash A$ でもある．この M' に対しての Solovay 文 $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ を構成し，$*$ をその Solovay 解釈として構成すると，これが所望の解釈となる．

今，仮に $T \vdash A^*$ と仮定すると議論が破綻することを示す．

補題 2.5 より $T \vdash \beta_1 \to \neg A^*$ であり，対偶を取れば $T \vdash A^* \to \beta_1$ である．よって $T \vdash \beta_1$ であり，更に D1 より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \beta_1 \urcorner)$ が得られる．一方，M' が単純拡張モデルなので $0R'1$ であるから S4 より $T \vdash \beta_0 \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \beta_1 \urcorner)$ であり，対偶を取れば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \beta_1 \urcorner) \to \neg \beta_0$ が得られる．これらを合わせると $T \vdash \neg \beta_0$ が得られる．したがって S1 より $T \vdash \bigvee_{i \in W \setminus \{0\}} \beta_i$ である．

$i \in W'$ かつ $i \neq 0$ としたとき，$d(i) \leq d(1)$ である．したがって補題 1.8 より $M', i \vDash \Box^{d(1)+1} \bot$ が得られる．更に補題 2.5 より $T \vdash \beta_i \to (\Box^{d(1)+1} \bot)^*$ であり，これはすなわち $T \vdash \beta_i \to \mathrm{Pr}_T^{d(1)+1}(\ulcorner \bot \urcorner)$ である．

i の取り方から $T \vdash \bigvee_{i \in W \setminus \{0\}} \beta_i$ と合わせることができ，$T \vdash \mathrm{Pr}_T^{d(1)+1}(\ulcorner \bot \urcorner)$ を得る．$\mathrm{Pr}_T^{d(1)+1}(\ulcorner \bot \urcorner)$ は Σ_1 文であるから，Σ_1 健全性より $\mathbb{N} \vdash \bot$ が言える．しかしこれはおかしい．よって仮定がおかしく，$T \nvdash A^*$ である．

$\Box$

残ったのは Solovay 文の列が構成可能であることを示すことである．

2.1 Solovay 文の列の構成

References

[Boo94] George S. Boolos. *The Logic of Provability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. ISBN: 978-0-521-48325-4. DOI: `10.1017/CBO9780511625183`.

[Jeř16] Emil Jeřábek. "Cluster expansion and the boxdot conjecture". In: *Mathematical Logic Quarterly* 62.6 (Dec. 2016), pp. 608–614. ISSN: 09425616. DOI: `10.1002/malq.201600036`. arXiv: `1308.0994[cs,math]`.

[Sol76] Robert M. Solovay. "Provability interpretations of modal logic". In: *Israel Journal of Mathematics* 25.3 (Sept. 1976), pp. 287–304. ISSN: 0021-2172, 1565-8511. DOI: `10.1007/BF02757006`.

[新井 21] 敏康 新井. **数学基礎論**. 増補版. 東京大学出版会, 2021. ISBN: 978-4-13-062927-0.

[菊池+16] 誠 菊池 et al. **数学における証明と真理 *:* 様相論理と数学基礎論**. 共立出版, 2016. ISBN: 978-4-320-11148-6.

索引