Very Weak Subintuitionistic Logic

とても弱い部分直観主義論理について

野口 真柊, 倉橋 太志

神戸大学システム情報学研究科 M1

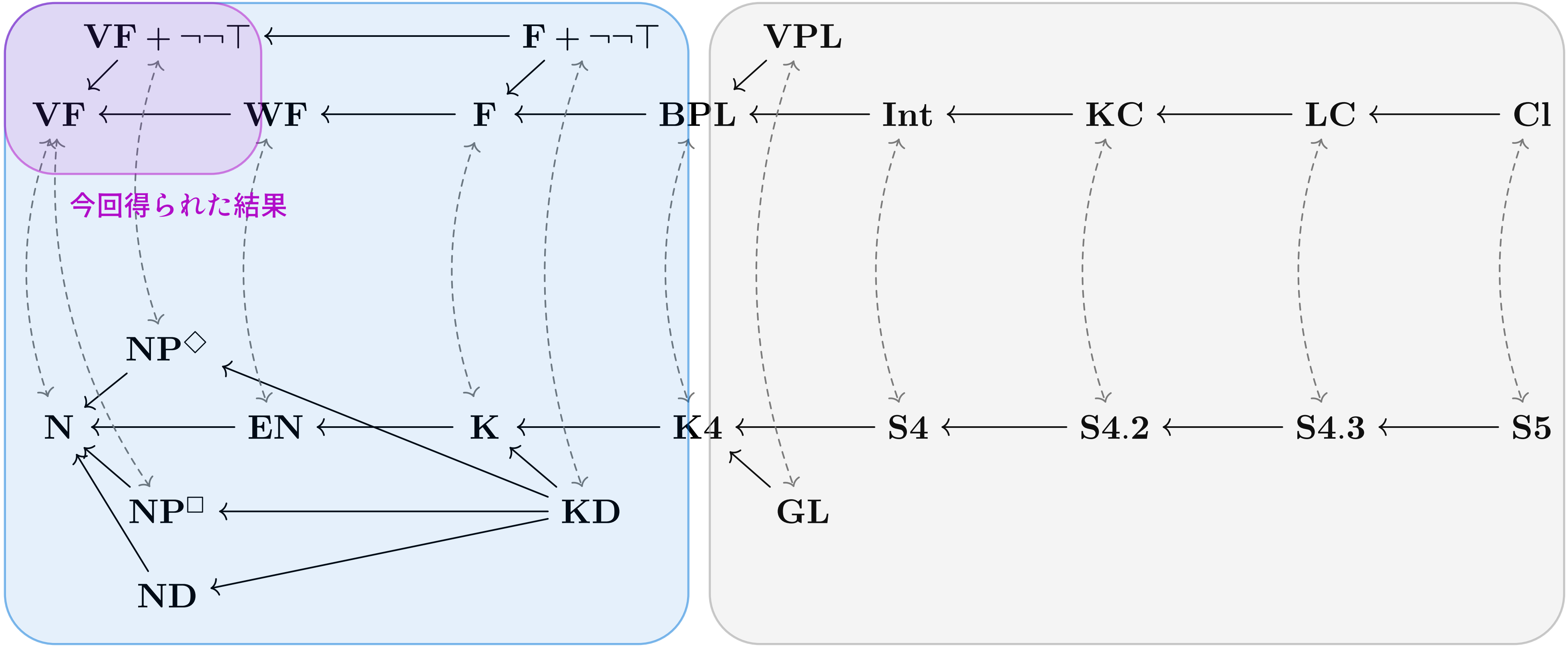
2025/12/19 @ MLG60

- スライド: https://sno2wman.github.io/slides-for-MLG60/main.pdf
- Formalized Formal Logic (Saito and Noguchi (2025)): この発表内容の大半は Lean で形式化して検証しています.
  - コードは https://github.com/FormalizedFormalLogic/Foundation/tree/master/Foundation/Propositional/FMT などにあります.

1. はじめに

1.1 地図

上は命題論理，下は様相論理．実線は論理の包含関係，点線は Modal Companion を表す．



このあたりのことを話します．

よく知られている事実

1.2 言語に関する注意

この発表では 矛盾 $\bot$ および 否定 $\neg$ の取り扱いに関する話題は取り扱わない.

定義 1:

- 命題論理の言語には $\bot$ が入っていて，否定は $\neg A :\equiv A \to \bot$ と定める.
- $\mathrm{Fml}_{\mathrm{M}}$ は様相論理式全体の集合
- $\mathrm{Fml}_{\mathrm{P}}$ は命題論理式全体の集合

1.3 すべての始まり: Gödel-McKinsey-Tarski の定理

直観主義命題論理 $\mathbf{Int}$ と様相論理 $\mathbf{S4}$ の間には深い関係がある.

事実 2 (Gödel (1933),McKinsey and Tarski (1948)):

$$\mathbf{Int} \vdash A \iff \mathbf{S4} \vdash A^{\mathcal{G}}$$

定義 3: Gödel 変換 $(\cdot)^{\mathcal{G}} : \mathrm{Fml_P} \to \mathrm{Fml_M}$.

- $p^{\mathcal{G}} \mapsto \Box p$, ただし p は命題変数.
- $\bot^{\mathcal{G}} \mapsto \bot$.
- $(A \to B)^{\mathcal{G}} \mapsto \Box\big(A^{\mathcal{G}} \to B^{\mathcal{G}}\big)$
- $(A \wedge B)^{\mathcal{G}} \mapsto A^{\mathcal{G}} \wedge B^{\mathcal{G}}$
- $(A \vee B)^{\mathcal{G}} \mapsto A^{\mathcal{G}} \vee B^{\mathcal{G}}$

1.4 S4 の拡張について

定義 4: 命題論理 L と様相論理 M について $L \vdash A \iff M \vdash A^g$ なら M は L の Modal Companion であると言う.

S4 の拡張論理に関する Modal Companion はよく知られている.

事実 5 (cf. Chagrov and Zakharyaschev (1997)):

- $\mathbf{S4.2} : \mathbf{S4} + \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ は弱排中律・Jankov の論理 $\mathbf{KC} : \mathbf{Int} + \neg p \vee \neg\neg p$ の Modal Companion.
- $\mathbf{S4.3} : \mathbf{S4} + \Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$ は Gödel-Dummett の論理 $\mathbf{LC} : \mathbf{Int} + (p \to q) \vee (q \to p)$ の Modal Companion.
- $\mathbf{S5} : \mathbf{S4} + p \to \Box\Diamond p$ は古典論理 $\mathbf{Cl} : \mathbf{Int} + p \vee \neg p$ の Modal Companion.

では S4 の部分論理についてはどうなる？

1.5 Kripke 意味論の観点から

定義 6: 命題論理の Kripke モデル $M := \langle W, R, V \rangle$ と $x \in W$ について充足関係

$$M, x \Vdash A \to B \iff \forall y \in W.[xRy, M, y \Vdash A \implies M, y \Vdash B]$$

定義 7: 様相論理の Kripke モデル $M := \langle W, R, V \rangle$ と $x \in W$ について充足関係

$$M, x \Vdash \Box A \iff \forall y \in W.[xRy \implies M, y \Vdash A]$$

事実 8:
- Int は前順序かつ付値が遺伝的な命題論理の Kripke モデルのクラスに対し健全かつ完全である.
  - 付値 V が遺伝的: $x \in V(p), xRy \implies y \in V(p)$.
- S4 は全ての前順序の様相論理 Kripke モデルのクラスに対し健全かつ完全である.

命題論理の Kripke モデルから全ての条件（前順序，遺伝性）を抜くとどうなるか？

1.6 Corsi の Subintuitionitic Logic $\mathbf{F}$

Corsi (1987) は直観主義論理の部分体系 (Subintuitionitic Logic) を調べた.

定義 9: 次の公理と規則で Hilbert 流で定める論理を $\mathbf{F}$ と呼ぶ.
(この公理化は de Jongh and Shirmohammadzadeh Maleki (2017) による)

1. $A \wedge B \to A$
2. $A \wedge B \to B$
3. $A \to A \vee B$
4. $B \to A \vee B$
5. $A \to A$
6. $\bot \to A$
7. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
8. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$: C
9. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$: D
10. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$: I
11. $\dfrac{A \to B \quad A}{B}\,(\mathrm{MP})$
12. $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\,(\mathrm{RA})$
13. $\dfrac{A}{B \to A}\,(\mathrm{AF})$

事実 10 (Corsi (1987)):
- $\mathbf{F}$ は命題論理の Kripke モデル全体のクラスに対し健全かつ完全である.
- $\mathbf{F}$ は選言特性(DP)を持つ：$\mathbf{F} \vdash A \vee B$ ならば $\mathbf{F} \vdash A$ または $\mathbf{F} \vdash B$.
- $\mathbf{F}$ は $\mathbf{Int}$ より真に弱い. $\mathbf{F}$ では無矛盾律は成立しない：$\mathbf{F} \nvdash \neg(p \wedge \neg p)$.

1.6 Corsi の Subintuitionitic Logic $\mathbf{F}$

事実 11 (Corsi (1987)):

$$\mathbf{F} \vdash A \iff \mathbf{K} \vdash A^{\mathcal{C}}$$

ただし元々の Gödel 変換は $p^{\mathcal{G}} \mapsto \Box p$ だったが，ここでは少し変えたものを使う． 変換の違いは付値の遺伝性によって生じる．

定義 12: Corsi の Gödel 変換 $(\cdot)^{\mathcal{C}} : \mathrm{Fml}_{\mathrm{P}} \to \mathrm{Fml}_{\mathrm{M}}$ は命題変数について $p^{\mathcal{C}} \mapsto p$ とする．それ以外は g と同じ．

以降は主にこちらの変換で考える．

$\mathbf{F}$ よりもっと弱い論理を考えたい.

様相論理では $\mathbf{K}$ より弱い論理 $\mathbf{E}$ などに対して近傍的な意味論を導入している.
$\longrightarrow$ これを命題論理に持ち込もう.

1.8 Weak Subintuitionistic Logic $\mathbf{WF}$

Shirmohammadzadeh Maleki and de Jongh (2016) では $\mathbf{F}$ より弱い部分論理 $\mathbf{WF}$ が導入された.

定義 13: 次の公理と規則で Hilbert 流で定める論理を $\mathbf{WF}$ と呼ぶ.

1. $A \wedge B \to A$
2. $A \wedge B \to B$
3. $A \to A \vee B$
4. $B \to A \vee B$
5. $A \to A$
6. $\bot \to A$
7. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
8. $\dfrac{A \to B \quad A \to C}{A \to B \wedge C}\,(\mathrm{RC})$
9. $\dfrac{A \to C \quad B \to C}{A \vee B \to C}\,(\mathrm{RD})$
10. $\dfrac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}\,(\mathrm{RI})$
11. $\dfrac{A \to B \quad A}{B}\,(\mathrm{MP})$
12. $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\,(\mathrm{RA})$
13. $\dfrac{A}{B \to A}\,(\mathrm{AF})$
14. $\dfrac{A \leftrightarrow B \qquad C \leftrightarrow D}{(A \to C) \leftrightarrow (B \to D)}\,(\mathrm{RE})$

$\mathbf{F}$ から公理 C, D, I を取り除いて規則 (RC), (RD), (RI) として入れ直し，更に (RE) も入れたもの.

1.8 Weak Subintuitionistic Logic $\mathbf{WF}$

近傍意味論は 2 項関係 $R : W \times W$ を近傍 $N : W \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ に取り替えて議論する.

事実 14 (Shirmohammadzadeh Maleki and de Jongh (2016)): $\mathbf{WF}$ は命題論理の近傍的な意味論に対して健全かつ完全である.

近傍意味論によって特徴づけられる $\mathbf{K}$ より弱い様相論理が Modal Companion になる.

定義 15: $\mathbf{EN} := \mathbf{Cl} + \dfrac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}(\mathrm{RE}) + \dfrac{A}{\Box A}(\mathrm{Nec})$

事実 16 (de Jongh and Shirmohammadzadeh Maleki (2018)): $\mathbf{WF} + (\mathrm{N}) \vdash A \iff \mathbf{EN} \vdash A^{\mathcal{C}}$

ここで

$$\frac{A \to B \vee C \quad C \to A \vee D \quad A \wedge C \wedge D \to B \quad A \wedge C \wedge B \to D}{(A \to B) \leftrightarrow (C \to D)}(\mathrm{N})$$

WF よりもっと弱い論理を考えたい.

EN より弱い様相論理 N（ネセシテーション $\dfrac{A}{\Box A}$ のみの論理）の意味論も整備されている.
$\to$ これを命題論理に持ち込もう.

2. 得られた結果: 論理 VF

2.1 様相論理の FMT 意味論

定義 17: $\mathbf{N} := \mathbf{Cl} + \dfrac{A}{\Box A}(\mathrm{Nec})$

Fitting, Marek, Truszczyński は N の分析のために次の意味論[1]を導入した． Fitting et al. (1992)

定義 18: 様相論理の FMT モデル $M := \langle W, \{R_A\}_{A \in \mathrm{Fml_M}}, V \rangle$.

- W は非空.
- R_A は様相論理式で添字付けられた 2 項関係 $\mathrm{Fml_M} \times W \times W$.

$\Box A$ の充足関係は以下で定める（R_A 関係だけ見る.）

$$M, x \Vdash \Box A \iff \forall y. x R_A y \implies M, y \Vdash A$$

事実 19 (Fitting et al. (1992)): N は全ての様相論理の FMT モデルのクラスに対し健全かつ完全.

この意味論を命題論理に上手く持ち込む.

[1] 本来は N-モデルなどと呼びたい (cf. Kurahashi (2024)) が，命題論理における弱い否定の分析などの文脈で N-モデルという命名の意味論が既にあり，混乱しかねないのでこの命名にしている.

2.2 命題論理の FMT 意味論

定義 20: 命題論理の FMT モデル $M := \langle W, \{R_A\}_{A \in \mathrm{Fml_P}}, r, V \rangle$.

- R_A は命題論理式で添字付けられた 2 項関係 $\mathrm{Fml_P} \times W \times W$.
- r は根で，任意の論理式 A と $x \in W$ に対し $rR_A x$.

$A \to B$ の充足関係は以下で定める（$R_{A \to B}$ 関係だけ見る.）

$$M, x \Vdash A \to B \iff \forall y. xR_{A \to B} y, M, y \Vdash A \implies M, y \Vdash B$$

モデル上の妥当性 $M \vDash A$: 全ての $x \in W$ について $M, x \Vdash A$

この意味論に対応する命題論理は何か？

どんなことが命題論理の FMT モデルで成り立つか観察してみる.

補題 21:
1. 公理 1-7 は成立する.
2. 公理 C, D, I は成立しない.
3. (MP), (RC), (RD), (RI), (RA), (AF) は妥当性を保存する.
4. (RE) は妥当性を保存しない.

根はモーダス・ポネンスのために必要である.

証明 (3.): $M \vDash A \to B, M \vDash A$ とすると特に根 r で $r \Vdash A \to B$ であり, 任意の x で $rR_{A \to B}x$ かつ $x \Vdash A$ だから $x \Vdash B$. よって $M \vDash B$. ■

2.3 Very Weak Subintuitionistic Logic $\mathbf{VF}$

定義 22: 次の公理と規則で Hilbert 流で定める論理を $\mathbf{VF}$ と呼ぶ.

1. $A \wedge B \to A$
2. $A \wedge B \to B$
3. $A \to A \vee B$
4. $B \to A \vee B$
5. $A \to A$
6. $\bot \to A$
7. $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
8. $\dfrac{A \to B \quad A \to C}{A \to B \wedge C}\,(\mathrm{RC})$
9. $\dfrac{A \to C \quad B \to C}{A \vee B \to C}\,(\mathrm{RD})$
10. $\dfrac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}\,(\mathrm{RI})$
11. $\dfrac{A \to B \quad A}{B}\,(\mathrm{MP})$
12. $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\,(\mathrm{RA})$
13. $\dfrac{A}{B \to A}\,(\mathrm{AF})$

$\mathbf{WF}$ に (RE) が入っていない.

観察から健全性はすぐに分かる.

補題 23: $\mathbf{VF}$ は全ての命題論理の FMT モデルのクラスに対し健全. したがって $\mathbf{VF} \nvdash \bot$ で無矛盾.

2.4 VF の選言特性

完全性を示す前に，選言特性を構文論的に示しておく必要がある．

定義 24 (Aczel の Kleene's Slash)： 論理式 A に対し，$|_{\mathbf{VF}} A$ を帰納的に定める．

- $|_{\mathbf{VF}} p \iff \mathbf{VF} \vdash p$
- $|_{\mathbf{VF}} \bot$ は成立しない．
- $|_{\mathbf{VF}} A \wedge B \iff |_{\mathbf{VF}} A \text{ and } |_{\mathbf{VF}} B$
- $|_{\mathbf{VF}} A \vee B \iff |_{\mathbf{VF}} A \text{ or } |_{\mathbf{VF}} B$
- $|_{\mathbf{VF}} A \to B \iff \mathbf{VF} \vdash A \to B \text{ and } |_{\mathbf{VF}} A \Longrightarrow |_{\mathbf{VF}} B$

補題 25： $\mathbf{VF} \vdash A \iff |_{\mathbf{VF}} A$

証明: $\Longrightarrow$ は証明の帰納法，$\Longleftarrow$ は論理式の帰納法. ■

系 26： $\mathbf{VF}$ は DP を持つ: $\mathbf{VF} \vdash A \vee B$ ならば $\mathbf{VF} \vdash A$ または $\mathbf{VF} \vdash B$.

証明： $\mathbf{VF} \vdash A \vee B \Longrightarrow |_{\mathbf{VF}} A \vee B \Longrightarrow |_{\mathbf{VF}} A \text{ or } |_{\mathbf{VF}} B \Longrightarrow \mathbf{VF} \vdash A \text{ or } \mathbf{VF} \vdash B$ ■

2.5 VF の完全性

定理 27 (VF の有限モデル性): VF $\nvdash A$ なら有限の反例 FMT モデル M_A で $M_A \nvDash A$.

正確な証明は補遺参照のこと.

証明 (スケッチ):

1. Lindenbaum 補題を示す.
2. W が $2^{|\mathrm{Sub}(A)|}$ 程度で抑えられるような反例モデル $\langle W, \{R_A\}_{A \in \mathrm{Fml_P}}, r, V \rangle$ をうまく構成する.
   - 根 r は Lindenbaum 補題を使って取る.
3. 真理補題を証明し，いつも通りの議論をする.

■

完全性から選言特性を示す一般的な議論とは逆で， Lindenbaum 補題の条件を満たすことを確認するために選言特性が必要ということを強調しておく.

系 28: VF は全ての命題論理の（有限）FMT モデルのクラスに対し健全かつ完全.

2.6 $\mathbf{VF}$ の Modal Companion

Modal Companion も確認できる.

定理 29: $\mathbf{VF} \vdash A \iff \mathbf{N} \vdash A^{\mathcal{C}}$

証明は補遺参照.

2.7 VF で証明できない事実

反例モデルを構成して次がわかる.

定理 30:
- $\mathbf{VF} \nvdash \neg(p \land \neg p)$.
- $\mathbf{VF} \nvdash \neg\neg\top$.
- $\mathbf{VF} \nvdash (\top \to (p \land q)) \leftrightarrow (\top \to (q \land p))$.

系 31: $\mathbf{WF} \vdash (\top \to (p \land q)) \leftrightarrow (\top \to (q \land p))$ なので **VF** は **WF** の真の部分論理.

大雑把に言って $\to$ が入れ子になった論理式はほとんど **VF** では証明できない.

2.8 VF の計算複雑性

Gödel 変換は多項式時間で計算できるから，計算複雑性について以下のことが分かる．

事実 32 (冨永 (2025))**:** **N** の充足可能性問題 **N-SAT** の計算複雑性は NP 完全．

系 33: **VF** の充足可能性問題 **VF-SAT** の計算複雑性も NP 完全．

2.9 VF の証明可能性論理的な観点

$\mathbf{N}$ は全ての証明可能性述語に共通した性質の証明可能性論理である．

事実 34 (Kurahashi (2024)): 任意の様相論理式 A について次は同値.

1. $\mathbf{N} \vdash A$.
2. 任意の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ 上の任意の算術的解釈 f について $\mathbf{PA} \vdash f(A)$.

系 35: 任意の命題論理式 A について次は同値.

1. $\mathbf{VF} \vdash A$.
2. 任意の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ 上の任意の算術的解釈 f について $\mathbf{PA} \vdash f\left(A^{\mathcal{C}}\right)$.

例えば $\mathbf{VF} \vdash A \to B$ なら $\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T\left(\ulcorner f\left(A^{\mathcal{C}}\right) \to f\left(B^{\mathcal{C}}\right)\urcorner\right)$． これがどのくらい重要なことなのかの分析は今後の課題[1].

[1]例えば $\mathbf{F}$ に推移性と遺伝性を加えた論理は Visser の Basic Propositional Logic $\mathbf{BPL}$ と同じであり，この論理は Visser (1981) で算術的完全性を命題論理のレベルで分析するために導入された経緯がある．$\mathbf{BPL}$ は様相論理 $\mathbf{K4}$ と上手く対応する．

3. VF の拡張

3.1 継続性の公理

$\mathbf{VF} \nvdash \neg\neg\top$ だったが実は $\mathbf{F} \nvdash \neg\neg\top$ でもある.
$\mathbf{F}$ の Kripke 意味論上では $\neg\neg\top$ は継続性(seriality)を表す.

定義 36: 2 項関係 R が継続的(serial): $\forall x.\exists y.xRy$

事実 37:
- 次の論理は継続的な様相論理 Kripke モデルのクラスに対し健全かつ完全である（つまり同値）
  - $\mathbf{KD} : \mathbf{K} + \neg(\Box A \wedge \Box\neg A)$
  - $\mathbf{KP}^{\Box} : \mathbf{K} + \neg\Box\bot$
  - $\mathbf{KP}^{\Diamond} : \mathbf{K} + \neg\Box\neg\top$ （通常の略記と思えば $\Diamond\top$）

事実 38 (Corsi (1987)):
- $\mathbf{F} + \neg\neg\top$ は継続的な命題論理 Kripke モデルのクラスに対し健全かつ完全である.
- $\mathbf{F} + \neg\neg\top \vdash A \iff \mathbf{KD} \vdash A^{\mathcal{C}}$

3.1 継続性の公理

$\neg\neg\top$ は **VF** 上でも継続性を表す.

定義 39: 命題論理/様相論理の FMT モデル M が命題論理式/様相論理式 A に対して A-継続的: $\forall x, \exists y, xR_A y$.

補題 40: 命題論理の FMT モデル M において, $M \vDash \neg\neg\top$ であることと M が $\neg\top$-継続的であることは同値.

定理 41: $\mathbf{VF} + \neg\neg\top$ は $\neg\top$-継続的な命題論理 FMT モデルのクラスに対し健全かつ完全である.

3.2 継続性に関する現象

事実 42 (Kogure and Kurahashi (2025)): $\mathbf{NP}^{\Box} := \mathbf{N} + \neg\Box\bot$ は $\bot$-継続的な様相論理の FMT モデルのクラスに対し健全かつ完全である．

$\mathbf{NP}^{\Box}$ は $\mathbf{VF} + \neg\neg\top$ の Modal Companion になりそうと思うが，実はそうならない．

定理 43: 任意の論理式 A に対し，以下は同値．

1. $\mathbf{VF} \vdash A$
2. $\mathbf{N} \vdash A^{\mathcal{C}}$
3. $\mathbf{NP}^{\Box} \vdash A^{\mathcal{C}}$

つまり $\mathbf{NP}^{\Box}$ も $\mathbf{VF}$ の Modal Companion である．

したがって $\mathbf{NP}^{\Box}$ は $\mathbf{VF} + \neg\neg\top$ の Modal Companion ではない．（そうだとしたら $\mathbf{VF} = \mathbf{VF} + \neg\neg\top$）

3.2 継続性に関する現象

K 上では同値だった $\neg\Box\bot$ と $\neg\Box\neg\top$ は **N** 上では同値でない.
このことが微妙な違いを引き起こしている.

定理 44: $\mathbf{NP}^{\Diamond}$ は $\neg\top$-継続的な様相論理の FMT モデルのクラスに対し健全かつ完全.

定理 45: $\mathbf{VF} + \neg\neg\top \vdash A \iff \mathbf{NP}^{\Diamond} \vdash A^{\mathcal{C}}$. つまり $\mathbf{NP}^{\Diamond}$ は $\mathbf{VF} + \neg\neg\top$ の Modal Companion である.

4. おわりに

4.1 まとめ

- とても弱い命題論理 $\mathbf{VF}$ を導入し，意味論を導入して完全性を示した.
- $\mathbf{N}$ は $\mathbf{VF}$ の Modal Companion である.
- $\mathbf{VF}$ 上の継続性に関する拡張を分析した.

4.2 ありがとうございました

https://sno2wman.github.io/slides-for-MLG60/main.pdf

4.3 参考文献

Chagrov, A., Zakharyaschev, M., 1997. Modal Logic, Oxford Logic Guides. Clarendon Press ; Oxford University Press, Oxford : New York.

Corsi, G., 1987. Weak Logics with Strict Implication. Mathematical Logic Quarterly 33, 389–406.. https://doi.org/10.1002/malq.19870330503

de Jongh, D., Shirmohammadzadeh Maleki, F., 2018. Subintuitionistic Logics and the Implications They Prove. Indagationes Mathematicae 29, 1525–1545.. https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.01.013

de Jongh, D., Shirmohammadzadeh Maleki, F., 2017. Subintuitionistic Logics with Kripke Semantics.. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54332-0_18

Fitting, M.C., Marek, V.W., Truszczyński, M., 1992. The Pure Logic of Necessitation. Journal of Logic and Computation 2, 349–373.. https://doi.org/10.1093/logcom/2.3.349

Gödel, K., 1933. Eine Interpretation Des Intuitionischen Aussagenkalküls. Ergebnisse Eines Mathematischen Kolloquiumus 4, 39.

Kogure, H., Kurahashi, T., 2025. Modal Logical Aspects of Provability Predicates and Consistency Statements [WWW Document].. https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.15531

4.3 参考文献

Kurahashi, T., 2024. The Provability Logic of All Provability Predicates. Journal of Logic and Computation 34, 1108–1135.. https://doi.org/10.1093/logcom/exad060

McKinsey, J.C.C., Tarski, A., 1948. Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting. The Journal of Symbolic Logic 13, 1–15.. https://doi.org/10.2307/2268135

Ruitenburg, W., 1991. Constructive Logic and the Paradoxes. Modern Logic 1, 271–301.

Saito, S., Noguchi, M., 2025. Formalized Formal Logic [WWW Document].. URL https://github.com/FormalizedFormalLogic/Foundation

Shirmohammadzadeh Maleki, F., de Jongh, D., 2016. Weak Subintuitionistic Logics. Logic Journal of IGPL jzw62.. https://doi.org/10.1093/jigpal/jzw062

Visser, A., 1981. A Propositional Logic with Explicit Fixed Points. Studia Logica 40, 155–175.. https://doi.org/10.1007/BF01874706

冨永浩平, 2025. 様相論理 N の計算複雑性, in: . Presented at the MLG 60.

5. 補遺

5.1 完全性定理の証明

完全性（有限モデル性）を示す．$\mathbf{VF} \nvdash A$ と仮定して反例となる有限 FMT モデルを構成する．

定義 46:
- $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{Sub}(A)$ とし (Γ, Δ) を A-タブローと呼ぶ.
- $(\Gamma, \Delta) \subseteq (\Gamma', \Delta') \iff \Gamma \subseteq \Gamma'$ and $\Delta \subseteq \Delta'$
- (Γ, Δ) が **VF**-無矛盾: $\mathbf{VF} \nvdash \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$
- (Γ, Δ) が飽和: $\Gamma \cup \Delta = \mathrm{Sub}(A)$

VF は Lindenbaum 補題を実行出来るぐらいの能力はある.

補題 47 (Lindenbaum 補題): **VF**-無矛盾な A-タブロー (Γ, Δ) は無矛盾かつ飽和した A-タブロー $(\Gamma', \Delta') \supseteq (\Gamma, \Delta)$ に拡大可能.

飽和無矛盾な A-タブロー全体の集合は有限．これを使って有限反例モデルを構成する.

定義 48: A の **VF-反例 FMT モデル** $M_A := \langle W, \{R_B\}_{B \in \mathrm{Fml_P}}, (\Gamma_r, \Delta_r), V \rangle$ を次で定める.

- W_A を 飽和無矛盾 A-タブロー全体の集合とする.
- $(\Gamma_1, \Delta_1) R_B (\Gamma_2, \Delta_2)$ を次で定める.
  - $B \equiv C \to D$ で $C \to D \in \mathrm{Sub}(A)$ のとき, $C \to D \in \Delta_1$ または $C \in \Delta_2$ または $D \in \Gamma_2$.
  - それ以外の B については常に成立.
- A-タブロー $\langle \Gamma_r^0, \Delta_r^0 \rangle := \langle \emptyset, \{B \to C \in \mathrm{Sub}(A) \mid \exists (\Gamma, \Delta) \in W, B \in \Gamma \text{ and } C \in \Delta\} \rangle$ を Lindenbaum 補題で拡大したタブロー (Γ_r, Δ_r) を根とする.
- $\Gamma \in V(p) \iff p \in \Gamma$.

M_A の根がちゃんと取れて, しかも根になっていることを確認する.

まず Lindenbaum 補題のために $\mathbf{VF}$-無矛盾であることを確認する．

先に選言特性を示したのはここで使うから．

補題 49: $\langle \Gamma^0_r, \Delta^0_r \rangle$ は $\mathbf{VF}$-無矛盾．

証明: そうでないとする．このとき $\mathbf{VF} \vdash \bigvee \Delta^0_r$．$\Delta^0_r$ が空なら $\mathbf{VF} \vdash \bot$ なので無矛盾性よりありえない．よって Δ^0_r は非空で，$\mathbf{VF}$ の選言特性よりある $D \in \Delta^0_r$ で $\mathbf{VF} \vdash D$．Δ^0_r の定義よりある $D \equiv B \to C \in \mathrm{Sub}(A)$ と $(\Gamma, \Delta) \in W$ で次を満たすものがある．

- $\mathbf{VF} \vdash B \to C$.
- $B \in \Gamma$ かつ $C \in \Delta$.

このとき $\mathbf{VF} \vdash \bigwedge \Gamma \to B$ と $\mathbf{VF} \vdash C \to \bigvee \Delta$ だから (RI) を 2 回使って $\mathbf{VF} \vdash \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ が言える．これは $(\Gamma, \Delta) \in W$ の無矛盾性に反する． ■

次に (Γ_r, Δ_r) が根になっていることを確かめる.

補題 50: 任意の論理式 B と $(\Gamma, \Delta) \in W$ について $(\Gamma_r, \Delta_r) R_B (\Gamma, \Delta)$ が成り立つ.

証明: $B \equiv C \to D$ で $C \to D \in \mathrm{Sub}(A)$ のときだけ考えれば良い.

もし任意の $(\Sigma, \Pi) \in W$ で $C \in \Pi$ または $D \in \Sigma$ ならば R の定義より明らか.

そうでない場合としてある $(\Sigma, \Pi) \in W$ で $C \notin \Pi$ かつ $D \notin \Sigma$ とする. このとき飽和性より $C \in \Sigma$ かつ $D \in \Pi$ だから $C \to D \in \Delta_r^0$. Lindenbaum 補題の構成から $\Delta_r^0 \subseteq \Delta_r$ なので $C \to D \in \Delta_r$. よって R の定義より $(\Gamma_r, \Delta_r) R_B (\Gamma, \Delta)$.

いずれにせよ $(\Gamma_r, \Delta_r) R_B (\Gamma, \Delta)$ が成り立つ. ■

よって M_A はちゃんと定義されている.

5.2 VF の Modal Companion の証明

真理補題はいつも通り成り立つから，後は Kripke 意味論と同じような議論をすればよい．

補題 51 (真理補題): 任意の $B \in \mathrm{Sub}(A)$ と $(\Gamma, \Delta) \in W$ について次が成り立つ．

$$M_A, (\Gamma, \Delta) \Vdash B \Longleftrightarrow B \in \Gamma$$

証明: 論理式の帰納法で素直にやれば良い． ■

定理 52 (VF の有限モデル性): $\mathbf{VF} \nvdash A$ なら有限の反例 FMT モデル M_A で $M_A \nvDash A$.

証明: $(\emptyset, A)$ は VF-無矛盾だから Lindenbaum 補題で拡大した $(\Gamma_A, \Delta_A) \in M_A$ が取れる．飽和性と真理補題より $A \in \Delta_A \Longleftrightarrow A \notin \Gamma_A \Longleftrightarrow (\Gamma_A, \Delta_A) \nVdash A$ なので $M_A \nvDash A$. ■

系 53: VF は全ての命題論理の（有限）FMT モデルのクラスに対し健全かつ完全.

5.3 いくつかの課題

定理: $\mathbf{VF} \vdash A \iff \mathbf{N} \vdash A^{\mathcal{C}}$

証明 ($\Longrightarrow$): 様相論理の FMT モデル $M^{\mathrm{M}} := \langle W, \{R^{\mathrm{M}}_B\}_{B \in \mathrm{Fml_M}}, V^{\mathrm{M}} \rangle$ から以下のように根 $r \notin W$ を付与して 命題論理の FMT モデル $M^{\mathrm{P}} := \langle W \cup \{r\}, \{R^{\mathrm{P}}_B\}_{B \in \mathrm{Fml_P}}, r, V^{\mathrm{P}} \rangle$ を構成する.

- R^{P}_B について
  - $x, y \in W$ かつ $B \equiv C \to D$ のとき $xR^{\mathrm{P}}_{B \to C}y :\iff xR^{\mathrm{M}}_{B^{\mathcal{C}} \to C^{\mathcal{C}}}y$.
  - それ以外のとき, $xR^{\mathrm{P}}_B y :\iff y \neq r$.
- V^{P} について
  - $x \in W$ のとき $p \in V^{\mathrm{P}}(x) :\iff p \in V^{\mathrm{M}}(x)$.
  - $x = r$ なら常に成立.

このとき任意の $x \in W$ と $B \in \mathrm{Fml_P}$ について $M^{\mathrm{P}}, x \Vdash B \iff M^{\mathrm{M}}, x \Vdash B^{\mathcal{C}}$ が成り立つ.

$\mathbf{N} \nvdash A^{\mathcal{C}}$ の反例モデルから $\mathbf{VF} \nvdash A$ の反例モデルが構成出来る. なので $\mathbf{VF} \vdash A$ ならば $\mathbf{N} \vdash A^{\mathcal{C}}$. ■

証明 $(\Longleftarrow)$: 逆に命題論理の FMT モデル $M^{\mathrm{P}} := \langle W, \{R^{\mathrm{P}}_B\}_{B \in \mathrm{Fml}_{\mathrm{P}}}, r, V^{\mathrm{P}} \rangle$ から以下のように様相論理の FMT モデル $M^{\mathrm{M}} := \langle W, \{R^{\mathrm{M}}_B\}_{B \in \mathrm{Fml}_{\mathrm{M}}}, V^{\mathrm{M}} \rangle$ を構成する.

- R^{M}_B について
  - $B \equiv C \to D$ のとき $xR^{\mathrm{M}}_{B \to C}y :\Longleftrightarrow \exists D, E \in \mathrm{Fml}_{\mathrm{P}}. B \equiv D^{\mathcal{C}} \text{ and } C \equiv E^{\mathcal{C}} \text{ and } xR^{\mathrm{P}}_{D \to E}y$.
  - それ以外のとき常に成立.
- $p \in V^{\mathrm{M}}(x) :\Longleftrightarrow p \in V^{\mathrm{P}}(x)$.

このとき任意の $x \in W$ と $B \in \mathrm{Fml}_{\mathrm{P}}$ について $M^{\mathrm{P}}, x \Vdash B \Longleftrightarrow M^{\mathrm{M}}, x \Vdash B^{\mathcal{C}}$ が成り立つ.

$\mathbf{VF} \nvdash A$ の反例モデルから $\mathbf{N} \nvdash A^{\mathcal{C}}$ の反例モデルが構成出来る. なので $\mathbf{N} \vdash A^{\mathcal{C}}$ ならば $\mathbf{VF} \vdash A$. ■

この証明は $\mathbf{NP}^{\Box}$ でも通る.

5.3 いくつかの課題

問題 54: $\neg\Box\bot$: P$^{\Box}$ と $\neg\Box\neg\top$: P$^{\Diamond}$ の他にも $\neg(\Box A \wedge \Box\neg A)$: D や $\dfrac{\neg A}{\neg\Box A}(\mathrm{Ros})$ などがあり，様相論理の FMT モデル上で異なる継続性を規定する． これらの拡張に対応する **VF** 上の拡張は何か？

問題 55: 様相論理の FMT 意味論上では $\Box p \to \Box\Box p$: 4 に対応する推移性も定義される． また命題論理の FMT 意味論では付値の遺伝性なども考えることは出来るだろう． これらを **VF** に入れるためにはどんな公理を足せば良いか？

5.3 いくつかの課題

問題 56: 帰結関係 $\Gamma \vdash_{\mathbf{VF}} A$ の導入について.

- $\mathbf{F}, \mathbf{WF}$ などでは強完全性まで示しているが,「前提 Γ から A を帰結出来る」の定義が少し変わっている. $\mathbf{VF}$ でも同様のことが出来るか?

5.3 いくつかの課題

問題 57: VF より弱い命題論理を考えられるか？

- 最も疑わしい原則である爆発律: $\bot \to A$を取り除く．Johansson の最小論理に関する意味論的アプローチを導入すれば出来ると思う．N から爆発律を取り除いた様相論理と対応するか？
- 知る限りでは現状，古典論理を単純に拡張して得られる様相論理は N が最弱．これより弱い命題論理を作るには様相論理側も新しい様相論理を考える必要があるか constructive/intuitionistic な様相論理を考える必要がある？
- 部分構造論理的なアプローチは？

5.3 いくつかの課題

問題 58: VF の意味は何か？

- F の拡張である Basic Propositonal Logic BPL などに対する BHK 解釈が Ruitenburg (1991) などで議論されている．F, WF, VF などに対しても良い解釈が与えられるか？
- そもそも FMT 意味論自体どういう事態を表した意味論なのか？ 元々の Fitting et al. (1992) では非単調論理の意味論として導入されている．