

Embeddings of Propositional Logics into the Provability Logics

証明可能性論理へ埋め込める命題論理について

野口 真柊 | 神戸大学システム情報学研究科 M2

2026/10/23 @ MLG61



1. はじめに

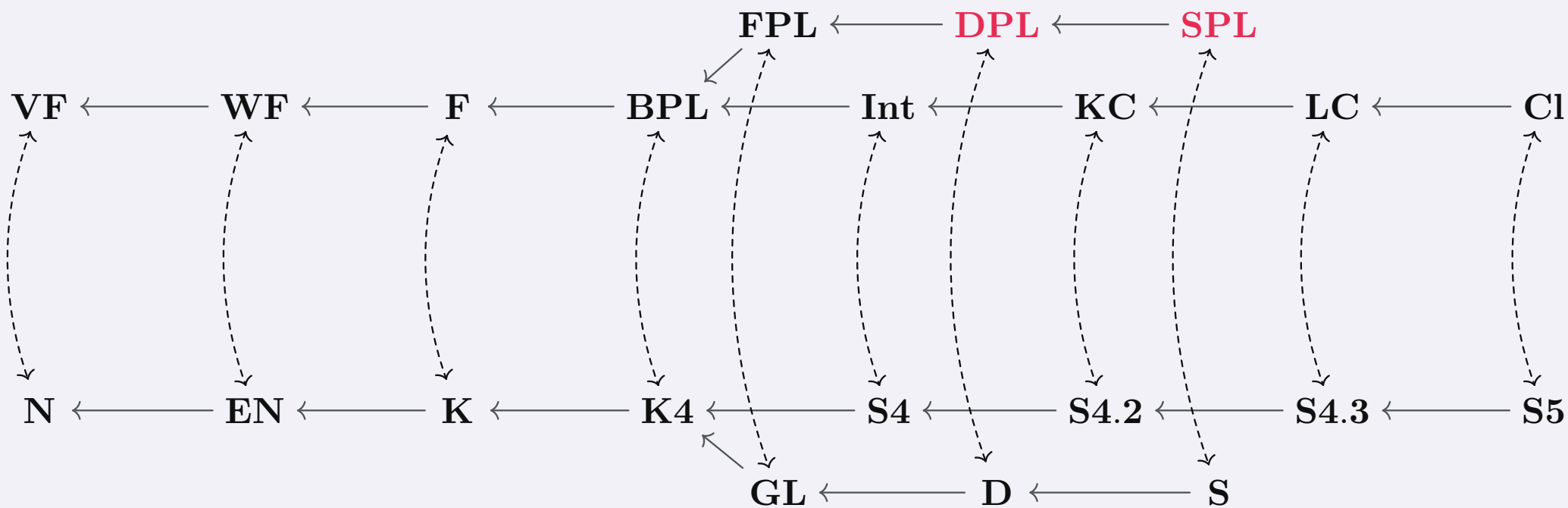
Solovay の証明可能性論理 S と Japaridze の証明可能性論理 D に適当に修正した Gödel 変換によって埋め込める命題論理をシーケント計算によって与えた, という話をします.

- ・ プレプリント: <https://arxiv.org/abs/2608.04620>



2. 前提知識

上は命題論理, 下は様相論理. 実線は論理の包含関係, 点線は様相同伴を表す.



直観主義命題論理 Int と様相論理 S4 の間には深い関係がある.

事実 1 (Gödel (1933), McKinsey and Tarski (1948)):

$$\text{Int} \vdash A \iff \text{S4} \vdash A^{\mathcal{G}}$$

定義 2: Gödel 変換 $(\cdot)^{\mathcal{G}} : \text{Fml}_{\text{P}} \rightarrow \text{Fml}_{\text{M}}$.

- $p^{\mathcal{G}} \mapsto \Box p$, ただし p は命題変数.
- $\perp^{\mathcal{G}} \mapsto \perp$.
- $(A \rightarrow B)^{\mathcal{G}} \mapsto \Box(A^{\mathcal{G}} \rightarrow B^{\mathcal{G}})$
- $(A \wedge B)^{\mathcal{G}} \mapsto A^{\mathcal{G}} \wedge B^{\mathcal{G}}$
- $(A \vee B)^{\mathcal{G}} \mapsto A^{\mathcal{G}} \vee B^{\mathcal{G}}$

定義 3: 命題論理 L と様相論理 M について $L \vdash A \iff M \vdash A^g$ なら (変換 g によって) M は L の様相同伴であると言う.

S4 の拡張論理に関する様相同伴はよく知られている.

事実 4 (cf. Chagrov and Zakharyashev (1997)):

- **S4.2** : $S4 + \Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$ は弱排中律 • Jankov の論理 **KC** : $\text{Int} + \neg p \vee \neg\neg p$ の様相同伴.
- **S4.3** : $S4 + \Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$ は Gödel-Dummett の論理 **LC** : $\text{Int} + (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ の様相同伴.
- **S5** : $S4 + p \rightarrow \Box\Diamond p$ は古典論理 **Cl** : $\text{Int} + p \vee \neg p$ の様相同伴.

Visser (1981) は主に証明可能性論理的な動機から BPL (**B**asic Propositional Logic)¹ と FPL (**F**ormal ...) を導入した.

定義 5: Visser–Gödel 変換 $(\cdot)^\vee : \text{Fml}_P \rightarrow \text{Fml}_M$ は命題変数の設定を

$$p^\vee \mapsto p \wedge \Box p$$

で定義する.

命題 6 (Visser (1981)): 以下が成立する².

$$\text{BPL} \vdash A \iff \text{K4} \vdash A^\vee$$

$$\text{FPL} \vdash A \iff \text{GL} \vdash A^\vee$$

¹Basic の由来は Smoryński が K4 を basic modal logic と呼んでいたことから由来するらしい.

²これらは Gödel 変換 $(\cdot)^G$ でも成立する.

つまり $K4(GL)$ は変換 ν によって BPL (FPL) の様相同伴.

Visser (1981) は Kripke 意味論によってこの事実を証明した.

命題 7: BPL は推移的かつ付値が遺伝的であるような Kripke モデル (=直観主義命題論理の Kripke モデルから反射律を抜いたモデル) に対して完全.

証明論的な方法によって埋め込むことも出来る.

Yamasaki and Sano (2017) では BPL の G3-style (i.e. 多重集合ベース) のシークエント計算 $\mathbf{G3}_{\text{BPL}}$ を与えて, それを K4 のシークエント計算 $\mathbf{G3}_{\text{K4}}$ の証明図へ忠実に変換する具体的な手続きを示した.

定理 8 (Yamasaki and Sano (2017)): $\mathbf{G3}_{\text{BPL}} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ iff $\mathbf{G3}_{\text{K4}} \vdash \Gamma^\vee \Rightarrow \Delta^\vee$.

$G3_{BPL}$ の含意 $\rightarrow$ に関する規則だけ見てみよう．通常の $\rightarrow$ の規則は入っておらず，代わりに次が入っている．

定義 9: 自然数 $k \geq 0, n < 2^k$ を取り， n の k -bit での 2 進数表記 $n = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i c_i$ とする．このとき $\langle n \rangle_i^k = c_i$ と定める．また， k -bit の表記だと思ったうえで n の 1 の補数を $\bar{n}$ で表す．

例: $k = 3, n = 5 = 101_{(2)}$ のとき $\langle 5 \rangle_1^3 = 0$ ．

定義 10 ($G3_{BPL}$ の $\rightarrow$ 導入規則): $0 \leq k$ と論理式 $C_0 \rightarrow D_0, \dots, C_n \rightarrow D_n$ は任意として，前提が 2^k 個の $\rightarrow$ 規則を導入する．

$$\frac{[\Delta_i, \Sigma, \{C_j \rightarrow D_j\}_{j < n}, A \Rightarrow B, \Gamma_i]_{i < 2^k}}{\Sigma, \{C_j \rightarrow D_j\}_{j < n} \Rightarrow A \rightarrow B, \Pi} (\rightarrow)_k$$

ここで $0 \leq k$ であり， $i < 2^k$ に対して， $\Delta_i := \{D_j : \langle i \rangle_i^k = 1\}$ ， $\Gamma_i := \{C_j : \langle \bar{i} \rangle_i^k = 1\}$ とする．

イメージとしては $C_0 \rightarrow D_0, \dots, C_n \rightarrow D_n$ の前件と後件の組み合わせを片っ端から試すイメージ．

例 ($\mathbf{G3}_{\text{BPL}}$ の $\rightarrow$ 導入規則の例):

$k = 0$:

$$\frac{\Sigma, A \rightarrow B, A \Rightarrow B}{\Sigma \Rightarrow A \rightarrow B, \Pi} (\rightarrow)_0$$

$k = 1$:

$$\frac{\Sigma, C_0 \rightarrow D_0, A \rightarrow B, A \Rightarrow B, C_0 \quad D_0, C_0 \rightarrow D_0, \Sigma, A \rightarrow B, A \Rightarrow B}{\Sigma, C_0 \rightarrow D_0 \Rightarrow A \rightarrow B, \Pi} (\rightarrow)_1$$

$k = 2$:

$$\frac{\Sigma, \{C_j \rightarrow D_j\}_{j < 2}, A \rightarrow B, A \Rightarrow B, C_0, C_1 \quad D_0, D_1, \{C_j \rightarrow D_j\}_{j < 2}, \Sigma, A \rightarrow B, A \Rightarrow B}{D_0, \Sigma, \{C_j \rightarrow D_j\}_{j < 2}, A \rightarrow B, A \Rightarrow B, C_1 \quad D_1, \Sigma, \{C_j \rightarrow D_j\}_{j < 2}, A \rightarrow B, A \Rightarrow B, C_0} (\rightarrow)_2$$

$$\Sigma, \{C_j \rightarrow D_j\}_{j < 2} \Rightarrow A \rightarrow B, \Pi$$

GL の拡張として証明可能性論理で重要な論理として S, D がある.

1. Solovay の証明可能性論理: $S := GL + \Box A \rightarrow A$.
 - TA の証明可能性論理.
2. Japaridze(Dzhaparidze)の証明可能性論理: $D := GL + \neg\Box\perp + \Box(\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box A \vee \Box B$.
 - $PA + \Sigma_1$ -反映原理 ($\Box_{PA}\sigma \rightarrow \sigma : \sigma \in \Sigma_1$) の証明可能性論理.

厳密に包含関係 $GL \subsetneq D \subsetneq S$ が成り立つ.

S のシーケント計算は Kushida (2020) で導入された.

主なアイデア: シーケントにレベルの概念を導入する.

定義 11: Γ, Δ を集合とし, $\ell = 1, 2$ とする. $\Gamma \Rightarrow^\ell \Delta$ をシーケントの基本単位とする.

$\Rightarrow^1$ で GL の計算をやって, 必要なら $\Rightarrow^1$ から $\Rightarrow^2$ に持ち上げて, $\Rightarrow^2$ で KT の計算をやるイメージ. $\Rightarrow^2$ から $\Rightarrow^1$ には戻れない.

ここでは Kashima and Kato (2023) の定義をちょっと修正して導入する.

定義 12: S のシークエント計算 G_S を以下の規則で定義する. $(\wedge L_\ell), (\wedge R_\ell), (\vee L_\ell), (\vee R_\ell)$ は省略.

$$\frac{}{p \Rightarrow^\ell p} (\text{Ax}_\ell)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow^\ell \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow^\ell \Delta} (\text{WL}_\ell^\ell)$$

$$\frac{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow^\ell \Delta \quad \Gamma \Rightarrow^\ell \Delta, A}{B, \Gamma \Rightarrow^\ell \Delta} (\rightarrow L_\ell^\ell)$$

$$\frac{\Box \Gamma, \Gamma, \Box A \Rightarrow^1 A}{\Box \Gamma \Rightarrow^1 \Box A} (\Box \mathbf{GL}_1^1)$$

$$\frac{}{\perp \Rightarrow^\ell \perp} (\perp L_\ell)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow^\ell \Delta}{\Gamma \Rightarrow^\ell \Delta, A} (\text{WR}_\ell^\ell)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow^\ell \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow^\ell \Delta, A \rightarrow B} (\rightarrow R_\ell^\ell)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow^2 \Delta}{\Box A, \Gamma \Rightarrow^2 \Delta} (\Box L_2^2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow^1 \Delta}{\Gamma \Rightarrow^2 \Delta} (\text{LU}_2^1)$$

定理 13 (G_S の証明能力):

1. $G_S \vdash \Gamma \Rightarrow^1 \Delta$ iff $GL \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$.
2. $G_S \vdash \Gamma \Rightarrow^2 \Delta$ iff $S \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$.

定理 14 (G_S のカット除去定理): G_S ではカット除去定理が成立する. 正確には, カット規則 (Cut_ℓ^ℓ) を以下のように定義したとき, $G_S + (\text{Cut}_\ell^\ell) \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば $G_S \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ である.

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow^\ell \Delta_1, \Delta_2 \quad \Gamma_1 \Rightarrow^\ell \Delta_1, A}{A, \Gamma_2 \Rightarrow^\ell \Delta_2} (\text{Cut}_\ell^\ell)$$

D のシーケント計算は Kashima et al. (2025) で導入された。基本のアイデアは S と同じで、シーケントに **3 個**¹のレベルを入れる。

定義 15: D のシーケント計算 G_D は, G_S の $(\Box GL_1^1)$ と $(\Box L_2^2)$ 規則以外を $\ell = 1, 2, 3$ に適当に拡張するしたうえで, 更に (LU_3^2) を追加して得られる。

$$\frac{\Box \Gamma \Rightarrow^2 \Box \Delta}{\Box \Gamma \Rightarrow^3 \Box \Delta} (LU_3^2)$$

¹実際には 2 つのレベルの体系もあるが, それはカット除去が成立しないなどあまり良い性質を持たず, 今回の内容では使わないので割愛。

定理 16 (G_D の証明能力):

1. $G_D \vdash \Gamma \Rightarrow^1 \Delta$ iff $GL \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$.
2. $G_D \vdash \Gamma \Rightarrow^2 \Delta$ iff $S \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$.
3. $G_D \vdash \Gamma \Rightarrow^3 \Delta$ iff $D \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$.

定理 17 (G_D のカット除去定理): $G_D + (\text{Cut}_\ell^\ell) \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば $G_S \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ である.

モチベーション：様相論理のシーケント計算を G_S や G_D を上手く Yamasaki and Sano (2017) の手法と同じように埋め込める **命題論理** のシーケント計算が作れるのでは？

元々は Petrukhin (2023) が S のシーケント計算を命題論理に埋め込む研究を行っていたが、しかしその証明を精査するとやや不備があったので、証明を修正した。

3. 結果

Solovay の命題論理 SPL のシーケント計算 $\mathbf{G}_{\text{SPL}}$ にもレベル付けされた $\Rightarrow^\ell$ を導入する.

定義 18 ($\mathbf{G}_{\text{SPL}}$): $\Gamma \Rightarrow^\ell \Delta$ は **集合**ベースのシーケントとする: $\ell = 1, 2$. $(\wedge L_\ell^\ell), (\wedge R_\ell^\ell), (\vee L_\ell^\ell), (\vee R_\ell^\ell)$ などは省略.

$0 \leq k$ と論理式 $C_0 \rightarrow D_0, \dots, C_n \rightarrow D_n$ は任意として, 前提が 2^k 個の $\rightarrow$ 規則を導入する.

$$\frac{[\Delta_i, \Sigma, \{C_j \rightarrow D_j\}_{j < n}, A \Rightarrow^1 B, \Gamma_i]_{i < 2^k}}{\Sigma, \{C_j \rightarrow D_j\}_{j < n} \Rightarrow^1 A \rightarrow B} (\rightarrow R_1^1)$$

ここで $0 \leq k$ であり, $i < 2^k$ に対して, $\Delta_i := \{D_j : \langle i \rangle_i^k = 1\}$, $\Gamma_i := \{C_j : \langle i \rangle_i^k = 1\}$ とする.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow^2 \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow^2 \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow^2 \Delta} (\rightarrow L_2^2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow^1 \Delta}{\Gamma \Rightarrow^2 \Delta} (\text{LU}_2^1)$$

定理 19 (Noguchi (2026), Petrukhin (2023)): $\mathbf{G}_{\text{SPL}} \vdash \Gamma \Rightarrow^{\ell} \Delta$ iff $\mathbf{G}_S \vdash \Gamma^{\vee} \Rightarrow^{\ell} \Delta^{\vee}$

$\text{SPL} := \{A \in \text{Fml}_P : \mathbf{G}_{\text{SPL}} \vdash \Rightarrow^2 A\}$ と定めれば, 実際 S が $\vee$ -変換によって様相同伴になる命題論理を見つけたと言える.

系 20 (Noguchi (2026)): $\mathbf{G}_{\text{SPL}}$ はカット除去が成立する. そうでなければ $\mathbf{G}_S$ もカット除去出来ないことになる.

Petrukhin (2023) の証明は誤っていると考えられる.

致命的な問題点は S のシーケント計算を多重集合ベースで考えている点である. この体系では, 縮約や逆転などは高さを保って行えないはずだが, しかし彼の先行研究では明らかに hp で行ってしまっており, 帰納法が成立していない箇所がある.

この問題が起こらないように自分の体系では集合ベースで考えて修正している.

注意 21: 多重集合ベースのシーケント計算で Kushida (2020) ではカット除去を具体的な手続きとして与えていたが, 集合ベースの G_S では意味論的に与えられている (頑張れば出来るかもしれないが).

SPL から S への埋め込みではカット除去に依拠しているので, それ故にこの埋め込みは構成的ではなくなっている.

この発表では特に注意していないが、非古典の命題論理へ埋め込む関係上、命題論理側の論理結合子は $\wedge, \vee, \rightarrow$ をプリミティブに持つ。

埋め込みを忠実に行うためには、様相論理側の言語も $\wedge, \vee, \rightarrow$ を入れ、かつシーケント計算にもそれらの規則を入れなければならない。

つまり、**論理結合子の選択が非常にセンシティブな問題になっている。**

Japaridze の命題論理 DPL のシークエント計算 $\mathbf{G}_{\text{DPL}}$ も同様のアイデアを取る.

とても大雑把に言って, 様相論理 $\Box A$ は命題論理では $B \rightarrow A$ だと思える観察から, 以下の規則を足せば良い.

定義 22 ($\mathbf{G}_{\text{DPL}}$): $\mathbf{G}_{\text{SPL}}$ を $\ell = 1, 2, 3$ に適当に拡張して, 以下 (LU_3^2) を足したシークエント計算を $\mathbf{G}_{\text{DPL}}$ と定める.

$$\frac{\{A_j \rightarrow B_j\}_{j < n}, \Gamma \Rightarrow^2 \{C_j \rightarrow D_j\}_{j < m}}{\{A_j \rightarrow B_j\}_{j < n}, \Gamma \Rightarrow^3 \{C_j \rightarrow D_j\}_{j < m}} (\text{LU}_3^2)$$

証明は $\mathbf{G}_S$ の場合とほとんど同じようにやればよい.

定理 23 (Noguchi (2026)): $\mathbf{G}_{\text{DPL}} \vdash \Gamma \Rightarrow^\ell \Delta$ iff $\mathbf{G}_D \vdash \Gamma^\vee \Rightarrow^\ell \Delta^\vee$

$\text{DPL} := \{A \in \text{Fml}_P : \mathbf{G}_{\text{DPL}} \vdash \Rightarrow^3 A\}$ と定めれば, 実際 D が $\vee$ -変換によって様相同伴になる.

系 24 (Noguchi (2026)): $\mathbf{G}_{\text{DPL}}$ はカット除去が成立する.

4. 結論といくつかの問題

まとめ: Solovay の証明可能性論理 S と Japaridze の証明可能性論理 D に適当に修正した Gödel 変換によって埋め込める命題論理 SPL, DPL をシーケント計算によって与えた.

以下では今考えている (考えるべき?) 問題を提示する.

SPL, DPL 自体の性質はほぼ何もわからない。特に意味論が無い。

- FPL は Visser の原論文 (Visser (1981)) で証明可能性論理として調べられている。
- Petrukhin (2023) は SPL に対し, Visser の tail model Visser (1984) の対応物を導入し, 埋め込み経由で完全性を示している。
- D の意味論は Beklemishev (1990), Beklemishev (1989), Kashima et al. (2025) で与えられており, 埋め込み経由で DPL の意味論を議論することは可能。

問題 25: 埋め込みを経由せずに SPL, DPL の意味論を直接定義し, 完全性を示すことは出来るか?

シーケント計算による定義だけでは, 今回の SPL, DPL が埋め込みを成立させるだけの ad-hoc な体系である可能性が排除できない (特に論理結合子の選択が本質的とは思えない)。せめて意味論的な裏付けが欲しい。

BPL と FPL の Hilbert 流の体系は Ishii et al. (2001), Suzuki and Ono (1997) など研究されている.

問題 26: SPL, DPL の Hilbert 流の体系はどのようなものか.

- ・ 複数レベルのシーケントを持つシーケント計算で定義しているため, Hilbert 流の体系の定義は容易ではない.

予想: 単一レベルの含意 $\rightarrow$ のみの言語では Hilbert 流の体系は存在しない. もしそうなら, 複数レベルの含意 $\rightarrow^1, \rightarrow^2, \rightarrow^3$ を備えた言語の論理とは何か? それらの含意は何を意味するのか?

SPL, DPL の埋め込み可能性とカット許容性は, S, D のシーケント計算のカット許容性に依存している. 後者は意味論的な議論で示されているため, 今回の結果は純粹に構成的ではない.

問題 27: G_{SPL}, G_{DPL} に対する, 構成的なカット除去アルゴリズムは?

- Beklemishev, L.D., 1990. On the Classification of Propositional Provability Logics. Mathematics of the USSR-Izvestiya 35, 247–275..
<https://doi.org/10.1070/IM1990v035n02ABEH000701>
- Beklemishev, L.D., 1989. Provability Logic without Craig's Interpolation Property. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR 45, 437–445.
- Chagrov, A., Zakharyashev, M., 1997. Modal Logic, Oxford Logic Guides. Clarendon Press ; Oxford University Press, Oxford : New York.
- Gödel, K., 1933. Eine Interpretation Des Intuitionistischen Aussagenkalküls. Ergebnisse Eines Mathematischen Kolloquiumus 4, 39.
- Ishii, K., Kashima, R., Kikuchi, K., 2001. Sequent Calculi for Visser's Propositional Logics. Notre Dame Journal of Formal Logic 42.
- Kashima, R., Kato, Y., 2023. Semantical Cut-Elimination for the Provability Logic of True Arithmetic [WWW Document].
- Kashima, R., Kurahashi, T., Iwata, S., Morioka, S., 2025. Cut-Free Sequent Calculi for the Provability Logic D. The Review of Symbolic Logic 1–22.
- Kushida, H., 2020. A Proof Theory for the Logic of Provability in True Arithmetic. Studia Logica 108, 857–875.
- McKinsey, J.C.C., Tarski, A., 1948. Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting. The Journal of Symbolic Logic 13, 1–15..
<https://doi.org/10.2307/2268135>
- Noguchi, M., 2026. Embeddings of Propositional Logics into the Provability Logics S and D [WWW Document].. URL <https://arxiv.org/abs/2608.04620>
- Petrukhin, Y., 2023. A Modification of Visser's Formal Logic and Its Connection with Solovay's Modal Logic. Russian Mathematics 67, 12–21.
- Suzuki, Y., Ono, H., 1997. Hilbert Style Proof System for BPL (No. IS-RR-97-0040F).

Visser, A., 1984. The Provability Logics of Recursively Enumerable Theories Extending Peano Arithmetic at Arbitrary Theories Extending Peano Arithmetic. *Journal of Philosophical Logic* 13, 97–113.

Visser, A., 1981. A Propositional Logic with Explicit Fixed Points. *Studia Logica* 40, 155–175.. <https://doi.org/10.1007/BF01874706>

Yamasaki, S., Sano, K., 2017. Proof-Theoretic Embedding from Visser's Basic Propositional Logic to Modal Logic K4 via Non-labelled Sequent Calculi, in: Yang, S.C.-M., Lee, K.Y., Ono, H. (Eds.), *Philosophical Logic: Current Trends in Asia*. Springer Singapore, Singapore, pp. 233–257.