

Very Weak Subintuitionistic Logic

とても弱い下位直観主義論理について

野口 真柊, 倉橋 太志

神戸大学システム情報学研究科 M2

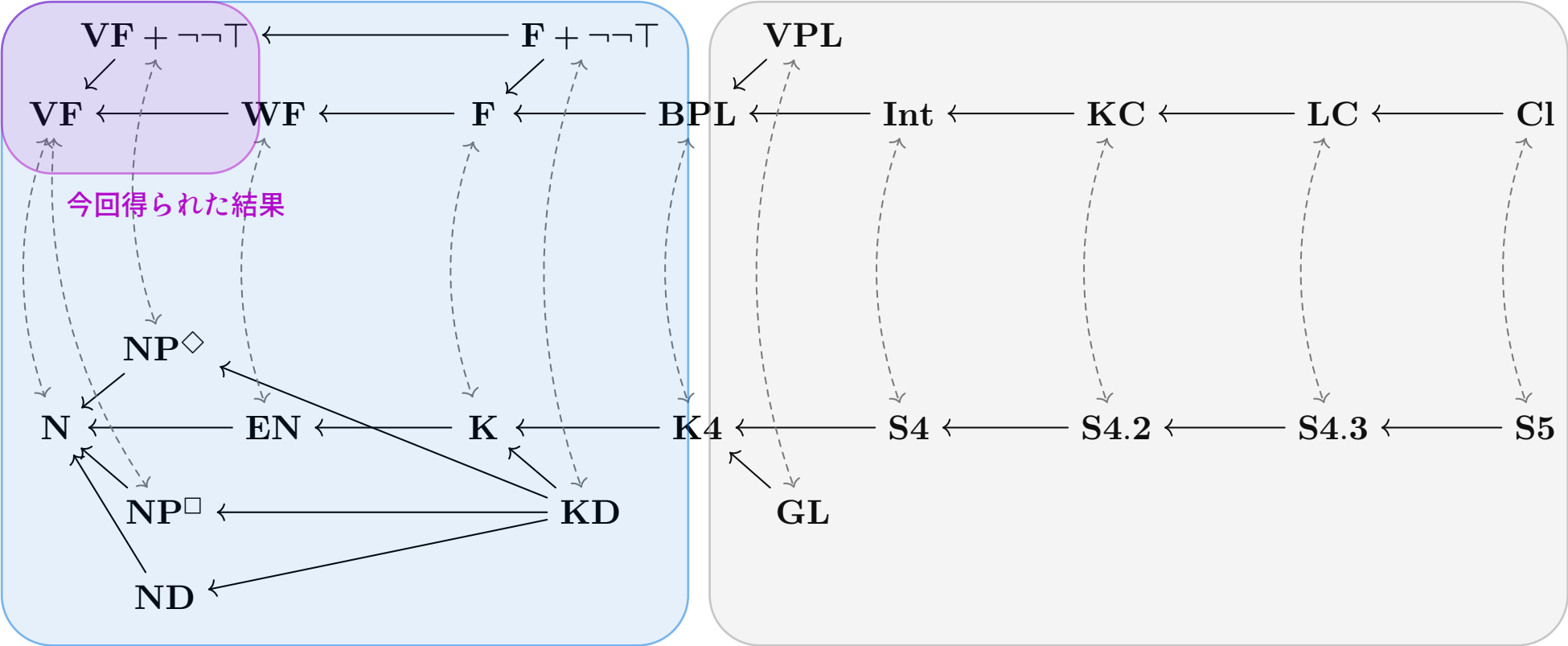
2026/09/04 @ 日本数学会秋季総合分科会

- スライド: <https://sno2wman.github.io/slides-for-Mathsoc2026Autumn/main.pdf>
- プレプリント: <https://arxiv.org/abs/2605.20769>
- Formalized Formal Logic: この発表内容は Lean4 で形式化して検証しています.
 - ▶ コードは <https://github.com/FormalizedFormalLogic/VeryWeakSubintuitionistic> にあります.



1. はじめに

上は命題論理, 下は様相論理. 実線は論理の包含関係, 点線は Modal Companion を表す.



このあたりのことを話します.

よく知られている事実

直観主義命題論理 Int と様相論理 S4 の間には深い関係がある.

事実 1 (Gödel (1933), McKinsey and Tarski (1948)):

$$\text{Int} \vdash A \iff \text{S4} \vdash A^{\mathcal{G}}$$

定義 2: Gödel 変換 $(\cdot)^{\mathcal{G}} : \text{Fml}_{\text{P}} \rightarrow \text{Fml}_{\text{M}}$.

- $p^{\mathcal{G}} \mapsto \Box p$, ただし p は命題変数.
- $\perp^{\mathcal{G}} \mapsto \perp$.
- $(A \rightarrow B)^{\mathcal{G}} \mapsto \Box(A^{\mathcal{G}} \rightarrow B^{\mathcal{G}})$
- $(A \wedge B)^{\mathcal{G}} \mapsto A^{\mathcal{G}} \wedge B^{\mathcal{G}}$
- $(A \vee B)^{\mathcal{G}} \mapsto A^{\mathcal{G}} \vee B^{\mathcal{G}}$

1.3 S4 の拡張について

定義 3: 命題論理 L と様相論理 M について $L \vdash A \iff M \vdash A^g$ なら M は L の Modal Companion であると言う.

S4 より強い論理に関する Modal Companion はよく知られている.

事実 4 (cf. Chagrov and Zakharyashev (1997)):

- S4.2 : $S4 + \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ は弱排中律 • Jankov の論理 $KC : Int + \neg p \vee \neg \neg p$ の Modal Companion.
- S4.3 : $S4 + \Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$ は Gödel-Dummett の論理 $LC : Int + (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ の Modal Companion.
- S5 : $S4 + p \rightarrow \Box \Diamond p$ は古典論理 $Cl : Int + p \vee \neg p$ の Modal Companion.

Question 1: S4 より弱い様相論理に対応する命題論理を考えたい.

Corsi (1987) による下位直観主義論理 F. F は Int よりも弱い.

定義 5: 次の公理と規則で Hilbert 流で定める論理を F と呼ぶ.

(この公理化は de Jongh and Shirmohammadzadeh Maleki (2017) による)

- | | | |
|-------------------------------|--|--|
| 1. $A \wedge B \rightarrow A$ | 7. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | |
| 2. $A \wedge B \rightarrow B$ | 8. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C) : C$ | 11. $\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \text{ (MP)}$ |
| 3. $A \rightarrow A \vee B$ | 9. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C) : D$ | |
| 4. $B \rightarrow A \vee B$ | 10. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) : I$ | 12. $\frac{A}{B \rightarrow A} \text{ (AF)}$ |
| 5. $A \rightarrow A$ | | |
| 6. $\perp \rightarrow A$ | | |

最小の正規様相論理 K は F の様相同伴.

事実 6 (Corsi (1987)):

$$F \vdash A \iff K \vdash A^c$$

ただし元々の Gödel 変換は $p^g \mapsto \Box p$ だったが, ここでは少し変えたものを使う. 変換の違いは付値の遺伝性によって生じる.

定義 7: Corsi の Gödel 変換 $(\cdot)^c : \text{Fml}_P \rightarrow \text{Fml}_M$ は 命題変数について $p^c \mapsto p$ とする. それ以外は g と同じ.

以降は主にこちらの変換で考える.

Question 2: K より弱い様相論理に対応する命題論理を考えたい.

2. 得られた結果: 論理 VF

2.1 様相論理の FMT 意味論

定義 8: CI に必然化則 $\frac{A}{\Box A}$ (Nec) を入れた論理を N と呼ぶ.

Fitting, Marek, Truszczyński は N の分析のために次の意味論を導入した. (cf: Fitting et al. (1992))

定義 9: 様相論理の FMT モデル $M := \langle W, \{R_A\}_{A \in \text{Fml}_M}, V \rangle$.

- W は非空.
- R_A は様相論理式で添字付けられた 2 項関係 $\text{Fml}_M \times W \times W$.

$\Box A$ の充足関係は以下で定める (R_A 関係だけ見る.)

$$M, x \Vdash \Box A \iff \forall y. x R_A y \implies M, y \Vdash A$$

事実 10 (Fitting et al. (1992)): N は全ての様相論理の FMT モデルのクラスに対し健全かつ完全.

この意味論を命題論理に上手く持ち込む.

定義 11: 命題論理の FMT モデル $M := \langle W, \{R_A\}_{A \in \text{Fml}_P}, r, V \rangle$.

- R_A は命題論理式で添字付けられた 2 項関係 $\text{Fml}_P \times W \times W$.
- r は根で, 任意の論理式 A と $x \in W$ に対し rR_Ax .

$A \rightarrow B$ の充足関係は以下で定める ($R_{A \rightarrow B}$ 関係だけ見る.)

$$M, x \Vdash A \rightarrow B \iff \forall y. xR_{A \rightarrow B}y, M, y \Vdash A \implies M, y \Vdash B$$

モデル上の妥当性 $M \models A$: 全ての $x \in W$ について $M, x \Vdash A$

この意味論に対応する命題論理は何か?

定義 12: 次の公理と規則で Hilbert 流で定める論理を VF と呼ぶ.

- | | | |
|-------------------------------|---|--|
| 1. $A \wedge B \rightarrow A$ | 7. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | |
| 2. $A \wedge B \rightarrow B$ | $\frac{A \rightarrow B \quad A \rightarrow C}{A \rightarrow B \wedge C} \text{ (RC)}$ | 11. $\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \text{ (MP)}$ |
| 3. $A \rightarrow A \vee B$ | 8. $\frac{A \rightarrow B \wedge C}{A \rightarrow B \wedge C} \text{ (RC)}$ | |
| 4. $B \rightarrow A \vee B$ | $\frac{A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{A \vee B \rightarrow C} \text{ (RD)}$ | 12. $\frac{A}{B \rightarrow A} \text{ (AF)}$ |
| 5. $A \rightarrow A$ | 9. $\frac{A \vee B \rightarrow C}{A \vee B \rightarrow C} \text{ (RD)}$ | |
| 6. $\perp \rightarrow A$ | $\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C} \text{ (RI)}$ | |
| | 10. $\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C} \text{ (RI)}$ | |

定理 13: VF は選言特性を持つ: $\text{VF} \vdash A \vee B$ ならば $\text{VF} \vdash A$ または $\text{VF} \vdash B$.

定理 14: VF は全ての命題論理の（有限）FMT モデルのクラスに対し健全かつ完全.

反例モデルを構成して次がわかる.

定理 15:

- $\text{VF} \not\vdash \neg(p \wedge \neg p)$.
- $\text{VF} \not\vdash \neg\neg\top$.
- $\text{VF} \not\vdash (\top \rightarrow (p \wedge q)) \leftrightarrow (\top \rightarrow (q \wedge p))$.

Modal Companion も確認できる.

定理 16: $\text{VF} \vdash A \iff \text{N} \vdash A^c$

3. VF の拡張

3.1 継続性の公理

$\text{VF} \not\models \neg\neg\top$ だったが実は $\text{F} \not\models \neg\neg\top$ でもある.

F の Kripke 意味論上では $\neg\neg\top$ は継続性(seriality)を表す.

定義 17: 2 項関係 R が継続的(serial): $\forall x. \exists y. xRy$

VF 上でも $\neg\neg\top$ は 継続性を表す.

定義 18: 命題論理/様相論理の FMT モデル M が 命題論理式/様相論理式 A に対して A -継続的:
 $\forall x, \exists y, xR_A y$.

補題 19: 命題論理の FMT モデル M において, $M \models \neg\neg\top$ であることと M が $\neg\top$ -継続的であることは同値.

定理 20: $\text{VF} + \neg\neg\top$ は $\neg\top$ -継続的な命題論理 FMT モデルのクラスに対し健全かつ完全である.

3.2 継続性に関する現象

事実 21 (Kogure and Kurahashi (2025)): $\text{NP}^\square := \text{N} + \neg\square\perp$ は $\perp$ -継続的な様相論理の FMT モデルのクラスに対し健全かつ完全である.

$\text{NP}^\square$ は $\text{VF} + \neg\neg\top$ の Modal Companion になりそうと思うが, 実はそうならない.

定理 22: 任意の論理式 A に対し, 以下は同値.

1. $\text{VF} \vdash A$.
2. $\text{N} \vdash A^c$.
3. $\text{NP}^\square \vdash A^c$.
4. $\text{N} + \{\neg\square\neg^{2n}\perp : n \in X\} \vdash A^c$. ここで $X \subseteq \mathbb{N}$ は任意.

つまり $\text{NP}^\square$ も VF の Modal Companion である.

したがって $\text{NP}^\square$ は $\text{VF} + \neg\neg\top$ の Modal Companion ではない. (そうだとしたら $\text{VF} = \text{VF} + \neg\neg\top$)

3.2 継続性に関する現象

定理 23: 以下が同値

1. $\mathbf{VF} + \neg\neg\top \vdash A$.
2. $\mathbf{N} + \neg\Box\neg\Box\top \vdash A^c$.
3. $\mathbf{N} + \neg\Box\neg\Box\top + \{\neg\Box\neg^{2n}\perp : n \in X\} \vdash A^c$. ここで $X \subseteq \mathbb{N}$ は任意.

つまり $\mathbf{N} + \neg\Box\neg\Box\top$ が $\mathbf{VF} + \neg\neg\top$ の Modal Companion である.

$\mathbf{K}$ 上では同値だった $\neg\Box\perp$ と $\neg\Box\neg\top$ は $\mathbf{N}$ 上では同値でない. このことが微妙な違いを引き起こしている.

メモ: $\mathbf{NP}^\Box := \mathbf{N} + \neg\Box\perp$

実はより一般に closed negative form という形の論理式の拡張に対して一般化出来る.

3.3 NR について

他の継続性についても議論できる.

事実 24: $\text{NR} := \text{N} + \frac{\neg A}{\neg \Box A} (\text{Ros})$ は任意の A に対して $\Box A$ -継続的な様相論理の FMT モデルのクラスに対し健全かつ完全である.

メモ: $\text{NP}^\Box := \text{N} + \neg \Box \perp$ は $\perp$ -継続的

定理 25: $\text{VFR} := \text{VF} + \frac{\neg A}{\neg \Box A} (\text{Ros})$ は任意の $A \rightarrow B$ -継続的な様相論理の FMT モデルのクラスに対して健全かつ完全

定理 26: NR は VFR の modal companion.

4. おわりに

- とても弱い命題論理 VF を導入し、意味論を導入して完全性を示した.
- N は VF の Modal Companion である.
- VF 上の継続性に関する拡張を分析した.
- future work: そもそもこの論理は何？



<https://sno2wman.github.io/slides-for-Mathsoc2026Autumn/main.pdf>

4.3 参考文献

- Chagrov, A., Zakharyashev, M., 1997. Modal Logic, Oxford Logic Guides. Clarendon Press ; Oxford University Press, Oxford : New York.
- Corsi, G., 1987. Weak Logics with Strict Implication. Mathematical Logic Quarterly 33, 389–406..
<https://doi.org/10.1002/malq.19870330503>
- de Jongh, D., Shirmohammadzadeh Maleki, F., 2017. Subintuitionistic Logics with Kripke Semantics.. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54332-0_18
- Fitting, M.C., Marek, V.W., Truszczyński, M., 1992. The Pure Logic of Necessitation. Journal of Logic and Computation 2, 349–373..
<https://doi.org/10.1093/logcom/2.3.349>
- Gödel, K., 1933. Eine Interpretation Des Intuitionistischen Aussagenkalküls. Ergebnisse Eines Mathematischen Kolloquiumus 4, 39.
- Kogure, H., Kurahashi, T., 2025. Modal Logical Aspects of Provability Predicates and Consistency Statements [WWW Document]..
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.15531>
- McKinsey, J.C.C., Tarski, A., 1948. Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting. The Journal of Symbolic Logic 13, 1–15..
<https://doi.org/10.2307/2268135>