標準的な様相論理の Lean での形式化について

野口 真柊

神戸大学システム情報学研究科 研究生

2024-11-24

このスライドは https://sno2wman.github.io/slides-for-tpp2024/main.pdf で閲覧出来ます.

Outline

1. 様相論理について
2. 様相論理の Lean での形式化
3. 参考文献

1.1 様相論理

定義 1.1.1: 古典的な命題論理に 1 項の様相演算子 $\Box, \Diamond$ を加えて拡張した論理体系一般を，**標準的な様相論理**という．

例: $\Box p$ を「pは必然的に起こる」と解釈する． $\Diamond$ を $\Box$ の双対として定義すると（$\Diamond p :\equiv \neg\Box\neg p$）「$p$ が起こらないことは必然的でない」すなわち「p が起こる可能性がある」と解釈できる．

1.1 様相論理

例: $\Box p$ をどのような様相として解釈するかで，様々な様相論理が定義できる．

- 義務「p は義務である」.
  - $\Box p \to \Diamond p$「p でなければならないなら，p でもよい」
- 知識「p を知っている」.
  - $\Box p \to \Box\Box p$「p を知っているなら，p を知っていることも知っている」
  - $\Box p \to p$「p を知っているなら p は正しい．」
- (形式的)証明可能性「p は証明可能である」

1.1 様相論理

定義 1.1.2 (Kripke 意味論):

- 世界の非空集合 W と W 上の 2 項関係 $R : W \times W$ の組 $\langle W, R \rangle$ を **Kripke フレーム**という．
- フレーム $\langle W, R \rangle$ とその上の付値関数 $V : \mathrm{Var} \times W \to 2$ の組 $\langle W, R, V \rangle$ を **Kripke モデル**という．
- 論理式の充足関係は世界に依存して決まる．$M = \langle W, R, V \rangle$ と $x \in W$ に対して，
  - $M, x \vDash p \iff V(x, p) = 1$「$x$ 上で p が真である」
  - $M, x \vDash \Box\varphi \iff \forall y, xRy \implies V(w, p) = 1$「$x$ から行ける全ての世界で φ は真」
- モデル M に対し，全ての世界で φ が充足されるなら，$M \vDash \varphi$「φ はモデル M で妥当」という．
- フレーム F 上の任意のモデルで φ が妥当であるなら，$F \vDash \varphi$「φ はフレーム F で妥当」という．

Outline

1. 様相論理について
2. 様相論理の Lean での形式化
3. 参考文献

2.1 Formalized Formal Logic

Formalized Formal Logic https://github.com/FormalizedFormalLogic

数理論理学の様々な事実や定理を Lean4 で形式化するプロジェクト．自分と齋藤氏が中心となって進めている．

2.1 Formalized Formal Logic

齋藤氏によってこれまで形式化された事実. [1]

- 古典命題論理
  - 健全性と完全性
  - 自動証明
- 古典 1 階述語論理と算術
  - 健全性と完全性
  - カット除去定理
  - Gödel の不完全性定理
    - 明日の齋藤氏の発表で詳しく説明される.

[1] 自動証明とカット除去定理と発表時では一旦書き直しのため破棄されている.

2.1 Formalized Formal Logic

自分がこれまでに形式化した事実

- 直観主義命題論理
  - Kripke 意味論
  - 選言特性
  - Gödel-McKensey-Tarski の定理
- 標準的な様相論理
  - Kripke 意味論と，いくつかの論理に対しての完全性
    - Geach 論理
    - 証明可能性論理 GL
  - 濾過法

今回の発表では強調した箇所について手短に説明する．

2.2 様相論理

定義 2.2.1:

- 以下の公理と推論規則を持つ Hilbert 流証明体系で証明可能な論理式の集合を論理 $\mathbf{K}$ とする.
  - 古典命題論理のトートロジー
  - 公理 K : $\Box(\varphi \to \psi) \to \Box\varphi \to \Box\psi$
  - モーダスポネンス (MP) : $\varphi \to \psi, \varphi \mid \psi$
  - ネセシテーション (Nec) : $\varphi \mid \Box\varphi$

2.2 様相論理

定義 2.2.2: 以下は $\mathbf{K}$ では証明できず，公理と呼ばれる．

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{T} : \Box\varphi \to \varphi && \mathsf{D} : \Box\varphi \to \Diamond\varphi \\
&\mathsf{B} : \varphi \to \Diamond\Box\varphi && \mathsf{4} : \Box\varphi \to \Box\Box\varphi \\
&\mathsf{5} : \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi && \mathsf{.2} : \Diamond\Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi \\
&\mathsf{L} : \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi
\end{aligned}
$$

定義 2.2.3: 公理 K に加えて更に公理を加えて拡張することで得られる論理を挙げる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{KT} &= \mathsf{K} + \mathsf{T} \\
\mathbf{S4} &= \mathsf{K} + \mathsf{T} + \mathsf{4} \qquad \mathbf{S5} = \mathsf{K} + \mathsf{T} + \mathsf{5} \\
\mathbf{KT4B} &= \mathsf{K} + \mathsf{T} + \mathsf{4} + \mathsf{B} \\
\mathbf{GL} &= \mathsf{K} + \mathsf{L}
\end{aligned}
$$

2.3 Geach 論理

定義 2.3.1: 2 項関係 R に対し $\langle i, j, m, n \rangle \in \mathbb{N}^4$ として以下が成り立つなら $\langle i, j, m, n \rangle$-合流的であるという．

$$\forall x, y, z. [xR^i y \wedge xR^j z \implies \exists u. [yR^m u \wedge zR^n u]]$$

ただし 2 項関係の n 回合成 R^n は以下のように定める．

- $xR^0 y \iff x = y$.
- $xR^{n+1} y \iff \exists z, xR^n z \ \& \ zRy$

例: 2 項関係のいくつかの性質は $\langle i, j, m, n \rangle$-合流性で一般化できる．

- 反射性 $xRy \implies yRx$ は $\langle 0, 0, 1, 0 \rangle$-合流性
- 推移性 $xRy \ \& \ yRz \implies xRz$ は $\langle 0, 2, 1, 0 \rangle$-合流性

2.3 Geach 論理

定義 2.3.2: $\langle i, j, m, n \rangle$ に対して以下を Geach 公理 $\mathsf{ga}_{i,j,m,n}$ という.

$$\mathsf{ga}_{i,j,m,n} \equiv \Diamond^i \Box^m \varphi \to \Box^j \Diamond^n \varphi$$

定義 2.3.3: $\mathbf{K}$ に いくつかの Geach 公理 $\mathsf{ga}_{i_1,j_1,m_1,n_1}, \ldots, \mathsf{ga}_{i_k,j_k,m_k,n_k}$ 入れて拡張した論理を Geach 論理 $\mathbf{Ge}(\langle i_1, j_1, m_1, n_1 \rangle, \ldots, \langle i_k, j_k, m_k, n_k \rangle)$ と書く.

2.3 Geach 論理

例: 公理 T, D, B, 4, 5, .2 は Geach 公理であり，K 及び 定義 2.2.3 のいくつかの論理は Geach 論理である．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \mathbf{Ge}() \\
\mathbf{KT} &= \mathbf{Ge}(\langle 0,0,1,0 \rangle) \\
\mathbf{S4} &= \mathbf{Ge}(\langle 0,0,1,0 \rangle, \langle 0,2,1,0 \rangle) \\
\mathbf{S5} &= \mathbf{Ge}(\langle 0,0,1,0 \rangle, \langle 1,1,0,1 \rangle) \\
\mathbf{KT4B} &= \mathbf{Ge}(\langle 0,0,1,0 \rangle, \langle 0,2,1,0 \rangle, \langle 0,1,0,1 \rangle) \\
\mathbf{S4.2} &= \mathbf{Ge}(\langle 0,0,1,0 \rangle, \langle 0,2,1,0 \rangle, \langle 1,1,1,1 \rangle)
\end{aligned}
$$

2.3 Geach 論理

定理 2.3.4 (Geach 論理の Kripke 完全性): $\mathbf{Ge}(t_1, ...t_k)$ は t_1-合流性,⋯,t_k-合流性を満たすフレームのクラスに対して健全かつ完全である． すなわち，次は同値である．

1. $\mathbf{Ge}(t_1, ...t_k)$ で φ が証明可能: $\mathbf{Ge}(t_1, ..., t_k) \vdash \varphi$
2. t_1-合流性,⋯,t_k-合流性を満たす全てのフレーム F で φ は妥当: $F \vDash \varphi$

系 2.3.5: $\mathbf{K}$ に 公理 T, D, B, 4, 5, .2 を適当に付け加えた論理たちは全て対応するフレームクラスに対して完全である． 例えば次のことが成り立つ．

- $\mathbf{S4}$ は 反射的/推移的，すなわち前順序のフレームのクラスについて完全である．
- $\mathbf{KT4B}$ は 反射的/推移的/対称的，すなわち同値関係のフレームのクラスについて完全である．
- $\mathbf{S5}$ は 反射的/推移的/Euclid 的なフレームのクラスについて完全である．

```
instance S4.Kripke.complete : Complete (Hilbert.S4 ℕ) ReflexiveTransitiveFrameClass

instance S5.Kripke.complete : Complete (Hilbert.S5 ℕ) ReflexiveEuclideanFrameClass
```

2.3 Geach 論理

系 2.3.6:

- 同値関係なフレームは反射的/推移的/Euclid 的であり，逆も成り立つ．そのため，$\mathbf{KT4B}$ と $\mathbf{S5}$ は証明能力が等しい．
- 前順序だが同値関係ではないフレームが存在するため，$\mathbf{KT4B}$ は $\mathbf{S4}$ より真に強い．

$$\mathbf{S4} \subsetneq \mathbf{KT4B} = \mathbf{S5}$$

```
theorem S4_strictlyWeakerThan_S5 : (Hilbert.S4 ℕ) <ₛ (Hilbert.S5 ℕ)

theorem equiv_S5_KT4B : (Hilbert.S5 ℕ) =ₛ (Hilbert.KT4B ℕ)
```

2.4 GL

様相論理 GL は不完全性定理で言及される証明可能性を分析するための様相論理：証明可能性論理として盛んに研究が行われている．まず，Kripke 意味論に対して以下の性質が成り立つ[1]．

定理 2.4.1: GL は推移的かつ非反射的な有限なフレームのクラスに対して健全かつ完全，すなわち有限フレーム性を持つ．[2]

```
instance : Kripke.FiniteFrameProperty (Hilbert.GL ℕ) TransitiveIrreflexiveFiniteFrameClass
```

[1] この事実は M. Maggesi and C. Perini Brogi [1] によって HOL Light で既に形式化が成されている．

[2] なお，有限性を要請せず単に非反射的なフレームのクラスに対して完全な様相論理は存在しない．この事実も形式化されている．

2.4 GL

更に強い事実が成り立つ.

定理 2.4.2: 次は同値.

1. $\mathbf{GL} \vdash \varphi$
2. 任意の推移的な木構造を持つ有限フレーム上のモデル M と，その根 r で $M, r \vDash \varphi$

```
theorem provable_iff_satisfies_at_root_on_FiniteTransitiveTree
  : (Hilbert.GL ℕ) ⊢! φ ↔ (∀ M : FiniteTransitiveTreeModel, Satisfies M.toModel M.root φ) :
```

2.4 GL

ここから更に次の系が導ける.

系 2.4.3: GL ではデネセシテーションは許容規則．すなわち,

$$\mathbf{GL} \vdash \Box\varphi \Longrightarrow \mathbf{GL} \vdash \varphi$$

```
theorem GL_unnecessitation! : (Hilbert.GL ℕ) ⊢! □φ → (Hilbert.GL ℕ) ⊢! φ
```

系 2.4.4: GL は様相選言特性を持つ．すなわち,

$$\mathbf{GL} \vdash \Box\varphi \lor \Box\psi \Longrightarrow \mathbf{GL} \vdash \varphi \parallel \mathbf{GL} \vdash \psi$$

```
theorem GL_MDP (h : (Hilbert.GL ℕ) ⊢! □φ₁ ⋎ □φ₂) : (Hilbert.GL ℕ) ⊢! φ₁ ∨ (Hilbert.GL ℕ) ⊢! φ₂
```

2.4 GL

定理 2.4.5 (第 2 不完全性定理): T を PA の無矛盾な再帰的可算な拡大理論とする．このとき，次を満たす証明可能性述語 $\mathbf{Pr}_T$ を構成できる．

T の無矛盾性を表す文 $\mathbf{Con}_T :\equiv \neg\mathbf{Pr}_T(\ulcorner\bot\urcorner)$ は T で証明できない．すなわち $T \nvdash \mathbf{Con}_T$.

```
abbrev bewₐ (σ : Sentence ℒₒᵣ) : Sentence ℒₒᵣ := U.provableₐ/[⌜σ⌝]

abbrev consistentₐ : Sentence ℒₒᵣ := ~U.bewₐ ⊥

theorem goedel_second_incompleteness [System.Consistent T] : T ⊬ T.consistentₐ
```

不完全性定理と GL の形式化は成されている．よって，証明可能性論理の礎となる算術的完全性という定理も形式化したい．

2.4 GL

定義 2.4.6:

- 様相論理の命題変数を 1 階述語論理上の算術の文へと写す写像 $* : \mathrm{Ver}_{\mathcal{L}_{\mathrm{M}}} \to \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}}$ を解釈と呼ぶ.
- $\Box$ を証明可能性述語 $\mathbf{Pr}_T$ として見るように解釈 $*$ を様相論理式へと拡張した写像 $*_{\mathbf{Pr}_T} : \mathrm{Form}_{\mathcal{L}_{\mathrm{M}}} \to \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}_{\mathrm{A}}}$ を $\mathbf{Pr}_T$-翻訳と呼ぶ．すなわち次を満たす.

$$
\begin{aligned}
p^{*_{\mathbf{Pr}_T}} &\mapsto p^* \\
\bot^{*_{\mathbf{Pr}_T}} &\mapsto \bot \\
(\varphi \to \psi)^{*_{\mathbf{Pr}_T}} &\mapsto \varphi^{*_{\mathbf{Pr}_T}} \to \psi^{*_{\mathbf{Pr}_T}} \\
(\Box\varphi)^{*_{\mathbf{Pr}_T}} &\mapsto \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi^{*_{\mathbf{Pr}_T}} \urcorner)
\end{aligned}
$$

2.4 GL

定理 2.4.7 (GL の算術的完全性定理): $\mathbf{Pr}_T$ は 定理 2.4.5 で構成できる証明可能性述語であるとする．このとき次は同値である．

1. $\mathbf{GL} \vdash \varphi$
2. 任意の解釈 $*$ に対して $T \vdash \varphi^{*_{\mathbf{Pr}_T}}$.

1.から 2.は帰納法を回せば良いだけなので簡単.

```
lemma arithmetical_soundness_GL [𝔅.HBL] (h : GL ⊢! p) : ∀ {f : Realization α L}, U ⊢!. (f.interpret 𝔅 p)
```

2.から 1.は難しく，形式化出来ていない． 道具立て（多変数版の対角化補題，GL の木フレームに対する完全性，etc.）自体は既に済んでいるので，あとは地道にやるだけだとは思うが難航している．

2.5 様相論理：その他

話せなかったが形式化が済んでいる内容

- 濾過法と有限フレーム性
  - ただし有限フレーム性が言えたからといって，Lean の中で決定可能性が形式化できそうかは不明（「形式化された決定可能性」のようなものを定義する必要がありそう）.
- 直観主義論理およびいくつかの中間論理の Kripke 完全性
  - その系として，排中律の非成立と選言特性
- 直観主義論理と様相論理の関連性
  - Gödel-McKensey-Tarski の定理：$\mathbf{Int}, \mathbf{S4}$ の Modal Companion.
- 規則 (Löb), (Henkin) を用いた $\mathbf{GL}$ の別定義
- $\mathbf{Triv}$ と $\mathbf{Ver}$ が古典命題論理に帰着できること
- $\mathbf{Grz}$ の Kripke 完全性
- $\mathbf{GL}, \mathbf{Grz}$ の Boxdot Companion[1]
- Pure Logic of Necessitation $\mathbf{N}$ の意味論とその完全性

[1] $\mathbf{GL}$ で証明できる論理式の $\Box$ の出現を全て $\boxdot$（ただし $\boxdot\varphi :\equiv \varphi \land \Box\varphi$）に置き換えた論理式は $\mathbf{Grz}$ で証明できる.

2.6 今後の展望

まだまだ多くのことが残されている！

- 強完全性
- **GL** の算術的完全性
- **GL** の不動点定理
- 様相論理の種々の計算体系および自動証明
- 様相論理の代数的意味論
- Modal Companion
- Kripke 不完全な様相論理
- その他多くの様相論理の事実
  - Makinson の定理
  - Boxdot Companion
- 補間定理
- その他の論理体系: Hybrid Logic, 様相 μ 計算など

2.7 今後の展望: 様相論理の種々の計算体系の形式化および自動証明

$\mathbf{GL}$ の普通のシークエント計算は論理式の集合を多重集合にするか集合にするかで議論の微細な違いが生じ，その他にも複雑な帰納法を回すため，証明が正確に行われているのか議論の余地があった[2], [3].

近年 R. Goré, R. Ramanayake, and I. Shillito [4]らによって$\mathbf{GL}$ のシークエント計算の形式化が Coq でなされた．まずはこれを Lean で再実装してみたい.

その他にも様相論理にはいくつかの計算体系：シークエント計算の拡張，あるいはタブロー計算がある．拡張されたシークエント計算の形式化は知る限りほぼ見たことがなく，紙とペンの証明では上手く証明が回っていないことがある（らしい）ので そういったところを形式化することで厳密に詰めてみたい.

余談: なお近年 Coq による証明可能性論理（特に直観主義証明可能性論理 $\mathbf{iGL}$, $\mathbf{iSL}$ など）に関連する証明論の形式化が近年盛んに行われている.

2.8 今後の展望: 様相論理の代数的意味論 / Modal Companion

Boolean 代数に適当な $\Box$ 演算を入れて拡張した代数を考えることで様相論理に代数的による意味論を与えられる．この代数を定理証明支援系で形式化するモチベーションはいくつかある．

1. Kripke フレームをコードで扱うのはやや面倒.
   - 逆に代数的な操作は形式化の上では扱いやすいという話がある[1].
2. より一般的に中間論理と様相論理の Modal Companion を考えるときにほぼ必須の知識.
3. その他にも Goldblatt-Thomason の定理や Sahlqvist の定理なども形式化するなら避けられないと思われる.

[1] 実際にそうなのかは不明

2.9 今後の展望: 様々な論理体系の形式化

今 Formalized Formal Logic で扱っているのは

- 古典命題論理，直観主義命題論理
- 古典 1 階述語論理とその算術
- 標準的な $\Box, \Diamond$ の様相論理

もっと様々な論理体系を形式化してみたい[1]．

- 様相 μ-計算
- Hybrid Logic
- Lax Logic
- (多エージェント)認識論理
- 動的論理
- 線形論理

特に Lean はプログラミング言語としても扱える（ことになっている）ので，これらの論理体系を形式化して応用的なソフトウェアなどを作ることも可能かもしれない．

[1] 様々な定理証明支援系でいくつかの実装がある．https://formalizedformallogic.github.io/Book/references.html 参照．

Outline

1. 様相論理について
2. 様相論理の Lean での形式化
3. 参考文献

3. 参考文献

[1] M. Maggesi and C. Perini Brogi, "Mechanising Gödel–Löb Provability Logic in HOL Light," Journal of Automated Reasoning, vol. 67, no. 3, p. 29, Sep. 2023, doi: 10.1007/s10817-023-09677-z.

[2] S. Valentini, "The modal logic of provability: Cut-elimination," Journal of Philosophical Logic, vol. 12, no. 4, pp. 471–476, Nov. 1983, doi: 10.1007/BF00249262.

[3] R. Goré and R. Ramanayake, "Valentini's Cut-Elimination for Provability Logic Resolved," The Review of Symbolic Logic, vol. 5, no. 2, pp. 212–238, Jun. 2012, doi: 10.1017/S1755020311000323.

[4] R. Goré, R. Ramanayake, and I. Shillito, "Cut-Elimination for Provability Logic by Terminating Proof-Search: Formalised and Deconstructed Using Coq," Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods, vol. 12842. Springer International Publishing, Cham, pp. 299–313, 2021. doi: 10.1007/978-3-030-86059-2_18.